This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

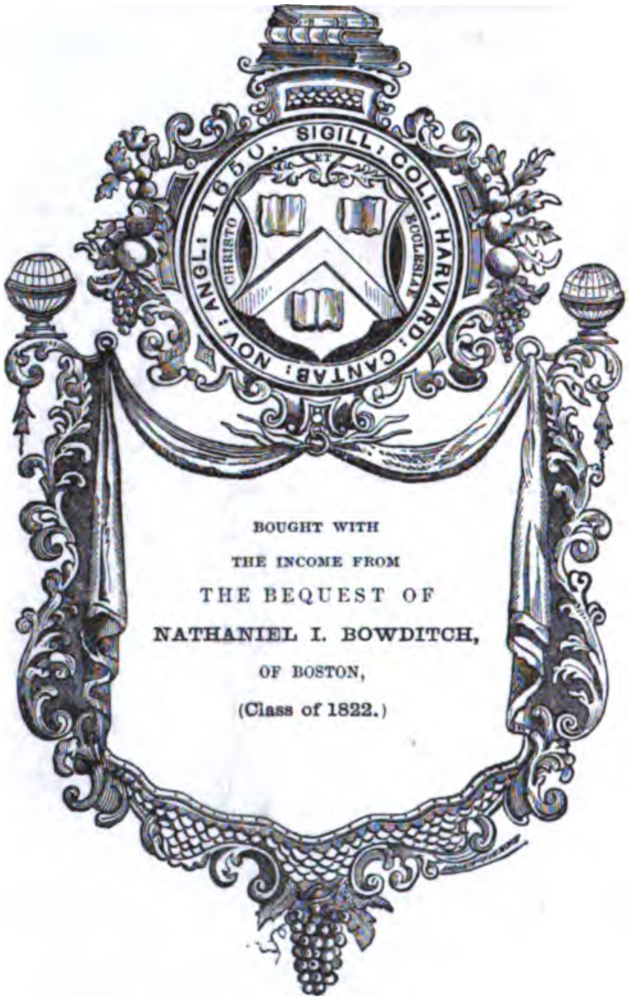
Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

MATH
4509.03

Math 4509.03

SCIENCE CENTER LIBRARY



LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

SULLA

Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni

Anno 1902-1903

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1903

Math 4509.03

OCT 3 1903

LIBRARY.

Bowditch fund

INDICE DEI CAPITOLI

Capitolo I.

Generalità sui gruppi continui finiti di trasformazioni. — Equazioni differenziali fondamentali. — Trasformazioni infinitesime come generatrici del gruppo.

§. 1. — Trasformazioni e loro composizione . . . . . . pag. 1
2. — Serie ∞^r di trasformazioni . . . . » 5
3. — Criterio per riconoscere il numero dei parametri essenziali » 10
4. — Definizione dei gruppi continui finiti . . . . . . » 16
5. — Esempî di gruppi continui . . . . » 20
6. — Risolubilità delle equazioni $c_i = \varphi_i\,(a, b)$ rispetto alle a o alle b . » 24
7. — Equazioni differenziali fondamentali . . . . . . » 27
8. — Alcune proprietà delle funzioni $\psi_{sh}(a)$, $\xi_{si}(x)$ . . . . » 31
9. — Gruppi ad un parametro G_1 . . . . » 34
10. — Trasformazione infinitesima di un G_1 . . . . . . » 38
11. — Cangiamento di variabili nelle trasformazioni infinitesime » 42
12. — Serie ∞^r di trasformazioni e loro trasformazioni infinitesime » 43
13. — Caso particolare di un gruppo . . . . » 47
14. — Nuova deduzione delle equazioni fondamentali (A) . . » 50
15. — Le r trasformazioni infinitesime $X_\lambda f = \sum_i^{1..n} \xi_{\lambda i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . . » 52
16. — Teorema fondamentale per le serie di trasformazioni soddisfacenti le (A) . . . . » 55

Capitolo II.

I tre teoremi fondamentali della teoria dei gruppi. — I gruppi misti.

§. 17. — Il primo teorema fondamentale . . . . pag. 58
18. — Casi ulteriori . . . . » 61
19. — Sistema completo di equazioni a derivate parziali equivalente al sistema (A) . . . . » 63
20-21. — Condizioni d'integrabilità (α) e (β) . . . . . » 65
22. — Dimostrazione di Schur del primo teorema fondamentale . » 69

§. 23. — Il secondo teorema fondamentale (teorema principale) . pag. 72
24. — Le relazioni fra le costanti di composizione C_{iks} . . » 77
25. — Proprietà del simbolo $(UV) = \sum_{iks}^{1..r} C_{iks}\, y_s \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial V}{\partial y_k}$ . . » 80
26. — Cangiamento di variabili . . . . » 83
27. — Il terzo teorema fondamentale . . . . » 86
28. — Le equazioni di Maurer per le ψ_{ik} . . . . . . » 89
29. — Dimostrazione di Schur del secondo e terzo teorema fondamentale . . . . » 92
30. — Composizione di due serie ∞^r di trasformazioni . . . » 95
31. — Serie ∞^r di trasformazioni nelle quali i prodotti di m loro trasformazioni appartengono alla serie . . . . . » 100
32. — I gruppi misti (o complessi) . . . . » 102

Capitolo III.

Equazioni di definizione di un gruppo. — Ordine delle trasformazioni infinitesime.

§. 33. — Eliminazione di costanti arbitrarie da un sistema di funzioni pag. 107
34. — Sistemi di equazioni a derivate parziali di Mayer e loro proprietà . . . . » 111
35. — Le equazioni di definizione di un gruppo G_r . . . . » 116
36. — Altro modo di definire un gruppo continuo. — Cenno sui gruppi infiniti . . . . » 119
37. — Ordine di una trasformazione infinitesima . . . . . » 124
38. — Distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime in un gruppo . . . . » 127
39. — Calcolo dei numeri τ dalle equazioni di definizione del gruppo » 132
40. — Sottogruppi generati dalle trasformazioni degli ordini superiori » 137
41. — Esempio del gruppo di movimenti . . . . . . » 144

Capitolo IV.

Funzioni e varietà invarianti rispetto ad un gruppo. — Gruppi transitivi ed intransitivi. — Gruppi imprimitivi. — Gruppi sistatici ed asistatici.

§. 42. — Funzioni invarianti rispetto ad un gruppo. . . . pag. 148
43. — Digressione sulle varietà in uno spazio S_n a n dimensioni . » 150
44. — Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_1 . . . . » 154
45. — Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_r . . . . » 159
46. — Dimensione delle varietà minime invarianti . . . . » 161
47. — Determinazione di tutte le varietà minime invarianti. . » 164
48. — Gruppi transitivi. . . . . » 169
49. — Invarianti dei gruppi intransitivi . . . . . . » 171
50. — Esempî varii . . . . » 174
51. — Gruppi imprimitivi . . . . » 178

§. 52. — Sistemi completi che ammettono un gruppo . . . pag. 182
53. — Gruppi sistatici ed asistatici . . . . » 186
54. — Imprimitività di un gruppo sistatico . . . . . . » 190
55. — Criterio per la sistaticità dedotto dalle equazioni di definizione . . . . » 193

Capitolo V.

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime. — Sottogruppi invarianti e serie di composizione di un gruppo.

§. 56. — Serie invarianti di trasformazioni infinitesime . . . pag. 198
57. — Serie invarianti rispetto ad un gruppo . . . . . » 201
58. — Trasformazioni finite della serie $\sum_k e_k X_k f$ . . . . » 207
59. — Trasformazioni permutabili. . . . . » 209
60. — Sottogruppi invarianti. — Gruppi semplici . . . . . » 212
61. — Serie di composizione. — Gruppi integrabili . . . . » 215
62. — Gruppo derivato . . . . » 218
63. — Condizioni d'integrabilità di un gruppo . . . . . » 221
64. — Prodotto di due gruppi permutabili . . . . . . » 224
65. — Teorema relativo a due sottogruppi invarianti massimi . » 226
66. — Teorema di Jordan-Lie sugli indici delle serie di composizione . . . . » 229

Capitolo VI.

Il gruppo aggiunto e i sottogruppi di un gruppo. — Sottogruppi a due parametri. — Equazione caratteristica. — Composizione o struttura di un gruppo. — Genere di un gruppo.

§. 67. — Permutazioni fra le trasformazioni di un gruppo indotte dalle trasformazioni stesse . . . . pag. 232
68. — Forma canonica delle equazioni di un gruppo . . . . » 235
69. — Il gruppo aggiunto e le sue trasformazioni infinitesime . » 239
70. — Numero dei parametri del gruppo aggiunto . . . . » 243
71. — Ricerca dei sottogruppi di un gruppo . . . . . . » 247
72. — Sottogruppi affini . . . . » 249
73. — Rappresentazione nello spazio ad r dimensioni . . . . » 252
74. — Esempio del gruppo di movimenti nel piano . . . . » 256
75. — Applicazione al gruppo projettivo sopra una variabile . » 262
76. — Sottogruppi a due parametri di un gruppo G_r . . . . » 266
77. — L'equazione caratteristica . . . . » 271
78. — Proprietà dell'equazione caratteristica . . . . . » 276
79. — I coefficienti di $\Delta(\rho)$ come invarianti del gruppo aggiunto . » 279
80. — Composizione (o struttura) di un gruppo . . . . . » 282
81. — Le relazioni fra le C_{iks}, C'_{iks} come individuanti un gruppo » 285
82. — Genere (Rang) di un gruppo . . . . » 287

Capitolo VII.

Prime ricerche sulla simiglianza dei gruppi. — Trasformazioni permutabili con tutte le trasformazioni di un gruppo. — Gruppi semplicemente transitivi reciproci.

§. 83. — Simiglianza dei gruppi . . . . pag. 291
84. — Caso in cui la condizione d'eguale composizione è sufficiente » 296
85. — Caso dei gruppi Abeliani e dei gruppi semplicemente transitivi » 302
86. — Condizioni generali necessarie per la simiglianza . . » 303
87. — Caso dei gruppi asistatici . . . . » 306
88. — Simiglianza di un gruppo con sè stesso . . . . » 309
89. — Trasformazioni permutabili colle singole trasformazioni di un gruppo . . . . » 312
90. — Gruppi semplicemente transitivi reciproci. . . . . » 317
91. — Proprietà delle coppie di gruppi reciproci . . . » 320
92. — Costruzione diretta del gruppo reciproco Γ_n . . . » 325
93. — Imprimitività di un gruppo semplicemente transitivo . » 328

Capitolo VIII.

Isomorfismo dei gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime. — Gruppi parametrici. — Isomorfismo dei gruppi in relazione colle trasformazioni finite. — Risoluzione del problema generale di riconoscere la simiglianza di due gruppi.

§. 94. — Isomorfismo di due gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime . . . . pag. 331
95. — Proprietà dell' isomorfismo . . . . » 337
96. — Gruppo complementare rispetto ad un sottogruppo invariante » 340
97. — Serie di composizione di due gruppi isomorfi. — Teorema di Hölder-Engel . . . . » 345
98. — Costruzione di gruppi isomorfi a gruppi primitivi . . » 350
99. — Definizione dei gruppi parametrici . . . . . . » 354
100. — Trasformazioni infinitesime del (primo) gruppo parametrico » 359
101. — Gruppi parametrici equivalenti . . . . » 363
102. — Isomorfismo oloedrico in relazione colle trasformazioni finite » 366
103. — Isomorfismo meriedrico . . . . » 372
104. — Ritorno alle condizioni di simiglianza per due gruppi . » 376
105. — Simiglianza fra gruppi transitivi . . . . . . » 379
106. — Simiglianza fra gruppi intransitivi . . . . . . » 384
107. — Nuovo enunciato per le condizioni di simiglianza . . » 391
108. — Trasformazioni permutabili con un gruppo . . . . » 394
109. — Teoremi sui gruppi asistatici e sistatici . . . . » 397

Capitolo IX.

Gruppi ampliati e prolungati. — Invarianti differenziali.

§. 110. — Transitività multipla . . . . pag. 401
111. — Invarianti di gruppi di punti . . . . » 404

§. 112. — Gruppi prolungati agli elementi lineari . . . . pag. 408
113. — Trasformazioni infinitesime del gruppo prolungato . . » 412
114. — Gruppo indotto dal sottogruppo di stabilità sugli elementi lineari per un punto . . . . » 415
115. — Definizione degli invarianti differenziali . . . . . » 419
116. — Trasformazioni prolungate . . . . » 422
117. — Gruppi prolungati . . . . » 426
118. — Esistenza e calcolo degli invarianti differenziali . . » 431
119. — Invarianti differenziali dei gruppi su due variabili . . » 433
120. — Esempi di calcolo d'invarianti differenziali . . . » 439
121. — Invarianti differenziali di superficie rispetto ai movimenti » 443

Capitolo X.

I gruppi continui finiti sopra una e sopra due variabili.

§. 122. — Numero dei parametri di un gruppo sopra una variabile pag. 446
123. — Riduzione dei gruppi sopra una variabile a gruppi projettivi » 449
124. — Gruppo lineare omogeneo G_4 su due variabili . . . . » 453
125. — Sottogruppi invarianti e sottogruppi G_1 di G_4 . . . . » 456
126. — Sottogruppi G_2 a due parametri in G_4 . . . . . » 460
127. — Sottogruppi G_3 di G_4 e riepilogo . . . . . . » 464
128. — Criterio per distinguere i gruppi primitivi del piano dagli imprimitivi . . . . » 466
129. — Ordine massimo delle trasformazioni infinitesime in un gruppo primitivo . . . . » 471
130. — Numero dei parametri di un gruppo primitivo nel piano . » 474
131. — Riduzione dei gruppi primitivi a forma normale nel caso A) » 478
132. — Riduzione a forma normale nei casi B) e C) . . . . » 482
133. — I gruppi G_8, G_6, G_5 come gruppi projettivi . . . » 486
134. — Gruppi intransitivi del piano. — Casi in cui il gruppo $\bar{G}_r$ è ad uno o a due parametri . . . . » 490
135. — Caso in cui il gruppo ridotto $\bar{G}_r$ è a tre parametri . . » 495
136. — Gruppi imprimitivi transitivi. — Caso in cui il gruppo accorciato Γ ha un parametro . . . . » 500
137. — Caso in cui Γ ha due parametri . . . . . . » 505
138. — Caso in cui Γ ha tre parametri . . . . . . » 511

Capitolo XI.

Prime applicazioni della teoria dei gruppi continui finiti ai problemi d'integrazione delle equazioni differenziali.

§. 139. — Preliminari . . . . pag. 518
140. — Equazioni differenziali del 1.° ordine che ammettono un gruppo Xf. . . . . » 520

§. 141. — Relazioni fra le trasformazioni infinitesime ed i fattori integranti . . . . pag. 524
142. — Determinazione delle trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione differenziale del 1.° ordine . . . » 527
143. — Interpretazione geometrica dei fattori integranti . . » 532
144. — Caso di equazioni del 1.° ordine non risolute rapporto alla derivata . . . . » 536
145. — Determinazione delle equazioni del 1.° ordine che ammettono un dato G_1 . . . . » 538
146. — Sistemi di equazioni differenziali e loro trasformazioni infinitesime . . . . » 542
147. — Proprietà delle trasformazioni infinitesime ammesse da un sistema differenziale . . . . » 544
148. — Integrazione di una $Af=0$ con note trasformazioni infinitesime . . . . » 549
149. — Equazioni $Af=0$ con un gruppo G_n integrabile . . » 553
150. — Riduzione di un'equazione $Af=0$ con gruppo composto a successive equazioni con gruppi semplici . . . . » 556
151. — I moltiplicatori di Jacobi per un'equazione $Af=0$ . . » 563
152. — Relazioni fra i moltiplicatori e le trasformazioni infinitesime » 568
153. — Integrazione delle equazioni $Af=0$ a tre variabili con una trasformazione infinitesima nota . . . . . . » 572
154. — Caso in cui della $Af=0$ si conoscono due trasformazioni infinitesime . . . . » 574
155. — Criterio per riconoscere se un'equazione del 2.° ordine $y''=\omega(x,y,y')$ ammette un gruppo Xf . . . . » 580
156. — Massimo numero di trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione del 2.° ordine . . . . « 584
157. — Equazioni differenziali del 2.° ordine con un gruppo G_8 . » 589
158. — Equazioni differenziali del 2.° ordine o d'ordine superiore con un dato G_1. . . . . » 592
159. — Integrazione di un'equazione differenziale del 2.° ordine con un noto G_1 . . . . » 595
160. — Riduzione a forma normale dei gruppi Abeliani G_2 su due variabili . . . . » 598
161. — Caso di un G_2 non Abeliano . . . . » 602
162. — Integrazione di un'equazione differenziale del 2.° ordine con un noto G_2 . . . . » 605

Capitolo XII.

Applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari. — Estensione delle teorie di Galois secondo Picard e Vessiot.

§. 163. — Criterio per la dipendenza lineare di più funzioni . . pag. 609
164. — Sistemi fondamentali d'integrali di un'equazione differenziale lineare . . . . » 614

§. 165. — Invarianti differenziali razionali del gruppo lineare omogeneo totale L . . . . pag. 617
166. — Invarianti dei sottogruppi di un gruppo G_r . . . » 623
167. – Risolventi delle equazioni differenziali lineari . . . » 628
168. — La risolvente di Picard e le sue proprietà fondamentali . » 634
169. — Campo di razionalità ed equazioni differenziali algebriche. » 642
170. — Gruppo di razionalità di un' equazione differenziale lineare » 648
171. — Proprietà fondamentali del gruppo di razionalità . . » 654
172. — Altra definizione del gruppo di razionalità. — Gruppo dell' equazione generale. . . . . » 658
173. — Riduzione del gruppo di razionalità per l'aggiunta di una funzione razionale . . . . » 663
174. — Riduzione del gruppo ad un gruppo puro G_r di Lie . . » 668
175. — Condizioni necessarie per l'integrabilità per quadrature . » 672
176. — Equazione differenziale lineare generale. — Semplicità del gruppo L_1 . . . . » 677
177. — La seconda parte del teorema di Vessiot . . . . » 684

Nota I. Le trasformazioni finite di un gruppo $G_r \equiv [X_1 f, X_2 f \ldots X_r f]$ composte con r trasformazioni prese rispettivamente negli r sottogruppi $[X_1 f], [X_2 f] \ldots [X_r f]$ . . . . . . pag. 688
Nota II. Le equazioni differenziali ordinarie che posseggono sistemi di soluzioni fondamentali (Sistemi di Lie). . . . » 692

Capitolo I:

Trasformazioni e loro composizione - Serie di trasformazioni e parametri essenziali - Concetto di gruppo continuo finito secondo Lie - Equazioni differenziali fondamentali. Gruppi ad un parametro - Trasformazioni infinitesime. Le r trasformazioni infinitesime indipendenti per un gruppo a r parametri -

§. 1

Trasformazioni e loro composizione

Siano $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ n variabili indipendenti, che in generale supporremo complesse - Chiameremo trasformazione il passaggio da queste n variabili ad n nuove variabili indipendenti $x_1'\ x_2' \ldots\ldots x_n'$, legate alle primitive da un sistema di formole:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n), \end{cases}$$

o come scriveremo più brevemente

$$(1^*)\qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots n) -$$

Rispetto alle funzioni $f_1\, f_2 \ldots f_n$ supporremo sempre, ov

ponendo a sinistra la trasformazione eseguita prima.
Si osservi che componendo una trasformazione S colla sua inversa S^{-1}, il risultato è la sostituzione ~~identica~~ o l'identità

$$x_i'' = x_i$$

che si indica col simbolo 1, sicchè

$$SS^{-1} = 1.$$

Colla definizione del prodotto di due trasformazioni risulta altresì stabilito il significato del prodotto di più trasformazioni $S_1, S_2 \ldots\ldots S_m$, ritenendo

$$S_1 S_2 \ldots\ldots S_m = (S_1 S_2 \ldots S_{m-1}) . S_m .$$

Si osservi subito che in un prodotto di più trasformazioni non vale in generale la legge permutativa, ma vale però quella associativa. Questa proprietà, che risulta immediatamente dal significato stesso delle trasformazioni (*), è importante perchè permette di eseguire sopra un prodotto di trasformazioni quelle riduzioni che per la legge associativa sono permesse in un prodotto di ordinarie quantità; così per es:

(*) Basta invero dimostrare che sussiste la legge associativa elementare espressa dalla formola

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3)$$

Ora se S_1 porta le x_i nelle x_i', la S_2 le x_i' nelle x_i'' e infine la S_3 le x_i'' nelle x_i''', l'effetto della trasformazione a sinistra è di portare le x_i nelle x_i'''. D'altronde siccome la $S_2 S_3$ porta le x_i' nelle x_i''', così anche quella

$$(S_1 S_2).(S_3 S_4) = S_1 S_2 S_3 S_4$$
$$(S_1 S).(S^{-1} S_2) = S_1 S_2 \quad \text{etc.}$$

Quando sopra le antiche variabili x e le nuove x' in una trasformazione

$$S) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

si eseguisca una medesima trasformazione

$$T \begin{cases} y_i = \varphi_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \\ y'_i = \varphi_i(x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_n) \end{cases},$$

la trasformazione che ne nasce pel passaggio dalle y alle y' è precisamente la

$$T^{-1} S T,$$

che dicesi la trasformata della S per mezzo della T. In vero colla T^{-1} si passa dalle y alle x, colla S dalle x alle x', e infine colla T dalle x' alle y'; dunque colla $T^{-1}ST$ dalle y alle y'.

§ 2

Serie ∞^r di trasformazioni

Supponiamo che nelle espressioni di una trasformazione S entrino r parametri $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$ sicchè si abbia

$$(3) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots\ldots a_r)$$

Questi parametri, come le variabili x, si supporranno in generale complessi e f_i saranno funzioni analitiche

a destra trasforma le x_i nelle x''_i e però le due trasformazioni sono identiche.

anche dei parametri $\underline{a}$. Diremo che gli r parametri $\underline{a}$ sono essenziali nelle f, quando queste funzioni non possono ridursi a dipendere da un numero minore di parametri $\underline{b}$ funzioni delle a (*).

Facendo percorrere ai parametri $\underline{a}$ tutti i valori di un certo campo, la trasformazione S percorrerà una serie continua di trasformazioni. Ma si noti che, ove i parametri $a_1, a_2 \ldots a_r$ non siano tutti essenziali, ogni trasformazione della serie si otterrà infinite volte da diversi sistemi particolari di valori dei parametri, mentre quando sono essenziali, a quella trasformazione corrisponderà un solo sistema di valori dei parametri $a_1, a_2 \ldots a_r$, ovvero un numero discreto di tali sistemi.

La prima asserzione è d'immediata evidenza, e la seconda risulta dimostrata osservando che negli sviluppi in serie che definiscono le f_i come funzioni delle x i coefficienti α sono certe funzioni delle $\underline{a}$; il numero s di queste α indipendenti è certo $\leq r$.

Quando $s < r$ introducendo i parametri α al posto dei parametri $\underline{a}$, si vede che questi non sono essenziali; e inversamente se i parametri $\underline{a}$ non sono essenziali, sarà $s < r$ poichè le α potranno scriversi come funzioni

---

(*) Se per es. i due parametri a_1, a_2 compariscono nelle f solo nella combinazione $a_1 + a_2$, il numero dei parametri effettivi si abbasserebbe evidentemente almeno a $r-1$

di quei parametri b in numero minore di r che posso-no sostituirsi alle a.

Quando i parametri a sono essenziali è dunque $s=r$ e le eguaglianze

$$f_i(x, a) = f_i(x, a')$$

richiedono che si abbia

$$\alpha_1(a) = \alpha_1'(a')$$
$$\alpha_2(a) = \alpha_2'(a')$$
$$- - - - - - - -$$
$$\alpha_r(a) = \alpha_r'(a')$$

e quindi i valori ammissibili per $a_1' \dots a_r'$ o si riduco-no all'unico sistema $a_1\, a_2 \dots a_r$ o formano una se-rie discreta, c. d. d. -

Per le circostanze ora osservate, allorquando nella (3) i parametri $a_1, a_2 \dots a_r$ siano essenziali, si dirà che la serie (3) è una serie ∞^r di trasformazioni. Propria-mente quando i parametri a siano complessi, la se-rie è ∞^{2r}, ma la locuzione introdotta ed ormai in uso in casi simili, non può generare confusione quando si rammenti che nel caso di parame-tri complessi il grado effettivo d'infinità della serie è sempre il doppio di quello adottato.

È importante stabilire un criterio per riconosce-re, data una serie (3) di trasformazioni, se gli r pa-rametri a sono o no essenziali - Per questo incomin-ciamo dall'osservare che se $a_1, a_2 \dots a_r$ non sono es-senziali, ma si possono ridurre agli $s < r$ parametri:

$$b_1, b_2 \ldots\ldots b_s$$

funzioni delle a, potremo determinare tali r funzioni A delle a che le n funzioni f_i, considerate come funzioni delle a soddisfino tutte all'equazione lineare omogenea alle derivate parziali

$$(\alpha) \qquad A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots\cdots + A_r \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} = 0$$

Basta infatti determinare le A in guisa che soddisfino alle $s<r$ equazioni lineari omogenee

$$(\beta) \qquad A_1 \frac{\partial b_i}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial b_i}{\partial a_2} + \cdots\cdots + A_r \frac{\partial b_i}{\partial a_r} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots s).$$

e allora, poichè le a entrano nelle f_i solo nelle combinazioni $b_1, \ldots b_s$, si vede subito che tutte le f soddisferanno alla (α) — Si osservi di più che le s equazioni (β) lineari omogenee nelle A hanno una caratteristica precisamente $= s$, poichè $b_1, b_2 \ldots b_s$ si suppongono indipendenti (altrimenti il numero dei parametri essenziali sarebbe ancora $< s$); perciò $r - s$ delle A restano arbitrarie; cioè in luogo della sola (α) potremo scrivere un sistema di $r-s$ tali equazioni indipendenti, che formeranno un sistema completo avendo le $r-(r-s)$ soluzioni b, e di questo sistema (α) saranno altrettante soluzioni le $f_1, f_2 \cdots f_n$ —

Inversamente se esiste una equazione (α), o un sistema di tali equazioni colle A funzioni delle

sole $\underline{a}$ di cui le f_i siano soluzioni, in queste funzioni i parametri a_1, a_2 ..... a_r non saranno tutti essenziali, ma si ridurranno ad $\underline{s}$ soltanto supposto che esistano $\underline{r-s}$ equazioni (indipendenti) come le (α) di cui le f_i siano soluzioni. E infatti in tale ipotesi il sistema delle $r-s$ equazioni (α) (supposto completo) ammetterà solo $s = r-(r-s)$ soluzioni indipendenti

$$b_1 \quad b_2 \; \ldots\ldots \; b_s$$

e le f_i quindi, in quanto dipendono dalle $\underline{a}$ e sono per ipotesi soluzioni del sistema (α), si ridurranno a funzioni delle sole b.

Concludiamo di qui: Condizione necessaria e sufficiente affinchè nelle n funzioni

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n \,;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

gli $\underline{r}$ parametri $\underline{a}$ non siano essenziali è che esista una o più equazioni della forma

$$(\alpha) \qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + A_r \frac{\partial f}{\partial a_r} = 0$$

colle A funzioni delle $\underline{a}$, di cui tutte le f_i siano soluzioni. Precisamente se esistono $\underline{r-s}$ equazioni (α) indipendenti, formanti un sistema completo, di cui le f_i siano soluzioni, i parametri essenziali nelle f si riducono ad $\underline{s}$ soltanto.

$$\mu \leq \mu_1 \leq r$$

Quando fosse $\mu_1 = r$ le (4) colle (4.) mostrano che le A sono tutte nulle e gli r parametri $\underline{a}$ sono tutti essenziali – Supposto ancora $\mu_1 < r$ si derivino nuovamente le (4.) rispetto a tutte le x e si formino le nuove $r^2 m$ equazioni

$$(4_2) \quad A_1 \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_1 \partial x_k \partial x_l} + A_2 \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_2 \partial x_k \partial x_l} + \cdots\cdots + A_r \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_r \partial x_k \partial x_l} = 0 ,$$

e si indichi con μ_2 la caratteristica della matrice M_2 formata aggiungendo alle colonne di M_1 a destra quelle relative alle equazioni (4_2), cioè associando alle

$$f_i \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

anche le derivate seconde $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$ – Sarà $\mu_1 \leq \mu_2 \leq r$ e se $\mu_2 = r$, gli r parametri saranno essenziali – Così proseguendo costruiremo le successive matrici

$$M, \; M_1, \; M_2 \; \cdots\cdots$$

di caratteristiche rispettive

$$\mu \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \cdots\cdots$$

Poiché tutte le μ sono $\leq r$ non potrà la serie

$$\mu, \; \mu_1, \; \mu_2 \; \cdots\cdots$$

essere sempre crescente e ad un certo punto sarà necessariamente una μ uguale alla precedente, diciamo

$$\mu_k = \mu_{k-1}$$

Allora si vede subito che tutte le successive $\underline{\mu}$ conserveranno lo stesso valore μ_{k-1} – E infatti essendo $\mu_k = \mu_{k-1}$ le colonne aggiunte alla matrice M_{k-1} per formare la matrice M_k sono combinazioni lineari omogenee di μ_{k-1} colonne

fisse in M_{k-1}; queste relazioni, derivate rispetto alle x, dimostrano che le nuove colonne in M_{k+1} sono pure combinazioni lineari omogenee delle dette μ_{k-1} colonne di M_{k-1}; così dicasi per M_{k+2}, M_{k+3} ......, come risulta successivamente derivando - Dunque: la serie di numeri

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_{k-1} \dots$$

è sempre crescente fino ad un massimo valore μ_{k-1}, dopo il quale tutte le μ eguagliano μ_{k-1}, onde basterà calcolare le μ sino a μ_{k-1} -

Se diciamo $s = \mu_{k-1}$ questo massimo valore delle μ, sarà certamente $s \leq r$, talchè in ogni caso, essendo almeno $\mu = 1$, e la serie di numeri

$$\mu, \mu_1, \mu_2 \dots \mu_{k-1}$$

crescendo ad ogni passo almeno di un'unità, sarà anche $k \leq r$, sicchè colla costruzione di r al più delle nostre matrici si arriverà al termine del calcolo -

Dimostriamo ora che: questo numero s che dà il massimo valore delle caratteristiche delle matrici

$$M, M_1, M_2 \dots$$

eguaglia precisamente il numero dei parametri essenziali nelle $\underline{m}$ funzioni $f_i(x, a)$

Perciò osserviamo che le equazioni

$$(4), (4_1), (4_2) \dots (4_{k-1})$$

si riducono precisamente ad s equazioni indipendenti nelle A, mentre delle successive $(4_k), (4_{k+1}) \dots$ è inutile tener conto perchè sono conseguenze delle s già scritte

porto alle x, indi la matrice M_2 ottenuta aggregando ancora le derivate seconde e così di seguito. Si prolunghi la costruzione di queste matrici M, M_1, M_2 ..... finchè la serie μ, μ_1, μ_2 ..... delle loro caratteristiche cessi di crescere, dopo di che le μ successive conservano un valore costante $s \leq r$. Questo numero s dà precisamente il numero dei parametri essenziali.

§ 1

Definizione dei gruppi continui finiti di trasformazioni

Le trasformazioni essendo operazioni suscettibili di composizione, sono loro applicabili i concetti generali dei gruppi di operazioni. Diremo che: una serie finita o infinita di trasformazioni costituisce un gruppo quando il prodotto di due trasformazioni qualunque della serie (distinte od anche coincidenti) è nuovamente contenuto nella serie stessa.

Quei gruppi che constano di un numero discreto, finito o infinito di trasformazioni diconsi discontinui. Tali sono p. e. i gruppi di sostituzioni sopra lettere la cui teoria è diventata, per opera specialmente di Galois, di fondamentale importanza per lo studio delle equazioni algebriche. Altri gruppi discontinui ma infiniti si incontrano in importanti rami di analisi (funzioni ellittiche modulari,

---

....

$A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ ..... $A_{r-s} = 1$

e calcolare le rimanenti A ogni volta dalle (5).

funzioni automorfe) -

I gruppi di cui ci occuperemo nel presente corso sono invece i gruppi continui, nelle cui trasformazioni entrano dei parametri arbitrari, suscettibili di assumere con continuità tutti i valori di un certo campo - La teoria di questi gruppi continui, quale oggidì la possediamo, è stata costruita quasi per intero da Sophus Lie; essa ha acquistato nella scienza matematica una grande importanza, tanto nel campo analitico come nel campo geometrico; in particolare per l'analisi nella teoria della integrazione delle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, dove l'ufficio della teoria dei gruppi continui è comparabile a quello che la teoria dei gruppi di sostituzioni compie nello studio delle equazioni algebriche -

I gruppi continui diconsi finiti, secondo Lie, quando le loro trasformazioni dipendono da un numero finito di parametri arbitrari - I gruppi continui finiti più semplici sono quelli le cui trasformazioni sono definite da un unico sistema di equazioni

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots n,$$

con r parametri che possono supporsi senz'altro essenziali - La proprietà della serie ∞^r di trasformazioni (6) di costituire un gruppo si traduce nella seguente proprietà funzionale per le f_i - Poichè due successive trasformazioni della serie (6)

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1 a_2 \dots a_r)$$

$$x_i'' = f_i(x_1', x_2' \dots x_n' ; b_1 b_2 \dots b_r)$$

debbono comporsi in una terza trasformazione

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; c_1 c_2 \dots c_r) ,$$

i parametri c della trasformazione composta dipendendo unicamente da quelli a, b delle componenti, le funzioni f_i debbono soddisfare alle relazioni funzionali

$$f_i(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_n(x,a) ; b_1 b_2 \dots b_r) = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; c_1 c_2 \dots c_r)$$

essendo le c funzioni delle a, b, diciamo

$$c_s = \varphi_s(a_1 a_2 \dots a_r ; b_1 b_2 \dots b_r)$$

In generale quando parleremo di un gruppo di trasformazioni, intenderemo che si tratti di un gruppo continuo finito, le cui trasformazioni sono contenute in un'unica serie (6) – Gli altri gruppi finiti più generali che conviene considerare sono quelli nei quali le trasformazioni del gruppo, in luogo di costituire una sola serie (6), costituiscono più di tali serie ed anche un numero infinito ma discreto – Per altro lo studio di tali gruppi finiti più generali, che si dicono gruppi misti, si riporta, come dimostreremo nel prossimo capitolo, a quello dei gruppi semplici (6) combinati con ordinarii gruppi discontinui.

Ogni gruppo continuo non finito potrebbe dirsi un gruppo continuo infinito – Per altro questa denominazione è adottata da Lie solo nel caso, sul quale più tardi ritorneremo (v. § 36), che le trasforma-

zioni del gruppo stesso risultino definite da un certo sistema di equazioni a derivate parziali.

Del resto noi ci occuperemo affatto in questo corso dei gruppi infiniti nel senso di Lie od in senso più generale; e sottintenderemo sempre che il gruppo sia finito.

Un'osservazione è subito necessaria per evitare un facile errore. Nei gruppi ordinarii di un numero finito di operazioni esiste sempre nel gruppo l'operazione identica, come pure insieme ad ogni operazione la sua inversa. Ma per i gruppi continui facciamo l'osservazione (che vale pure per i gruppi discontinui infiniti): Dalla definizione di gruppo continuo non segue affatto che il gruppo debba sempre contenere la trasformazione identica e tanto meno che insieme ad ogni trasformazione nel gruppo debba comparirvi la sua inversa.

Più avanti dimostreremo soltanto che se il gruppo contiene la trasformazione identica, corrispondente ai valori

$$a_1^{(0)}\ a_2^{(0)} \ldots\ldots a_r^{(0)}$$

dei parametri, e se questi valori appartengono all'interno del campo ove le f_i sono definite, allora restando le a in un intorno sufficientemente ristretto di $(a_i^{(0)})$, insieme ad ogni trasformazione S_a nel gruppo, esisterà effettivamente la sua inversa S_a^{-1}.

§ 5

Esempi di gruppi continui finiti

Per illustrare i concetti generali posti nel § precedente adduciamo alcuni semplici esempi di gruppi continui tolti dalla geometria ove si presentano nel modo più intuitivo -

1° Se una figura si muove nello spazio senza cangiare di forma, le coordinate $x' y' z'$ di ogni punto della figura nella nuova posizione si esprimono per funzioni lineari intere delle coordinate primitive x, y, z - Supposti assi ortogonali, le formole si scrivono:

$$(\alpha) \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c \end{cases}$$

dove le nove costanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa e si esprimono quindi per tre soli indipendenti, per es. gli angoli θ, φ, ψ Euleriani. La totalità dei movimenti rigidi dello spazio, rappresentata dalle formole (α) dove

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

percorre tutte le sostituzioni ortogonali destrorse ed a, b, c

ottengono tutti i valori possibili, costituisce quindi un gruppo continuo finito con 6 parametri essenziali. È chiaro che in questo gruppo esiste la trasformazione identica ed insieme ad ogni trasformazione la sua inversa.

2° Se a tutti i movimenti α) associamo la simmetria rispetto per es. al piano xy data dalla formola

$$x' = x \;,\quad y' = y \;,\quad z' = -z$$

otteniamo una seconda serie di trasformazioni che differisce dalla α) solo in questo che le corrispondenti sostituzioni ortogonali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono sinistrorse. Le due serie insieme ci forniscono un semplice esempio di gruppo misto.

3° I movimenti delle figure piane sul proprio piano formano un gruppo continuo a tre parametri; insieme ai ribaltamenti ci danno un gruppo misto.

Il primo è rappresentato analiticamente dalle formole

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha + a \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases},$$

il secondo associando a queste le altre

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha + a \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha - y\cos\alpha + b \end{cases}$$

4° Se al gruppo total dei movimenti dello spazio associamo una similitudine

$$x' = kx \;,\quad y' = ky \;,\quad z' = kz$$

a parametro k variabile, otteniamo un gruppo continuo a 7 parametri, il gruppo delle similitudini.

5º Combinando i movimenti dello spazio con tutte le inversioni per raggi vettori reciproci rispetto alle sfere dello spazio si ottiene un gruppo continuo con 10 parametri, che è il gruppo delle trasformazioni conformi. Secondo un teorema di Liouville, esso contiene tutte e sole le trasformazioni dello spazio che conservano gli angoli.

6º La totalità delle collineazioni dello spazio forma un gruppo continuo con 15 parametri, il così detto gruppo projettivo dell' S_3. In esso formano un sottogruppo a 7 parametri quelle collineazioni che lasciano fissa una conica non degenere, un sottogruppo a 6 parametri quelle che lasciano fissa una quadrica non degenere, in fine un sottogruppo a 3 parametri quelle che riportano in sè una cubica gobba.

Così ancora quelle collineazioni dello spazio che lasciano fisso un complesso lineare non speciale formano un gruppo a 10 parametri.

In tutti gli esempi sopra addotti, le formole di trasformazione sono date da sostituzioni lineari salvo che nell'esempio 5º ove abbiamo sostituzioni quadratiche (*).

(*) È questo un particolare esempio dei gruppi Cremoniani, ove le formole di trasformazione danno le nuove variabili espresse razionalmente per le antiche ed inversamente.

La generalizzazione allo spazio a n dimensioni è immediata. Così le sostituzioni lineari omogenee sopra n variabili

$$(\beta) \qquad x'_i = \sum_k^{1\dots n} a_{ik}\, x_k\,,$$

cogli n^2 parametri a_{ik}, ci danno evidentemente un gruppo di Lie. Componendo la precedente colla

$$x''_l = \sum_i^{1\dots n} b_{li}\, x'_i$$

si ha la sostituzione composta

$$x''_l = \sum_k c_{lk}\, x_k\,,$$

dove le c si esprimono per le a, b colle formole

$$c_{lk} = \sum_i a_{ik}\, b_{li}\,.$$

Se nella (β) poniamo fra i parametri a la relazione espressa da

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

avremo evidentemente un sottogruppo con n^2-1 parametri. Se invece facciamo percorrere al modulo a della sostituzione (β) solo le r radici r^{me} dell'unità, r essendo un intero fisso, avremo evidentemente un gruppo misto con r serie di trasformazioni a n^2-1 parametri. Così pure formano un gruppo a $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri le sostituzioni $\beta)$ ortogonali destrorse.

§ 6

Risolubilità delle equazioni $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$ rispetto alle $\underline{a}$ o alle $\underline{b}$

Supponiamo di avere una serie ∞^r di trasformazioni

(6) $$x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; a_1 a_2 \ldots\ldots a_r) \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

che formano un gruppo – Dalle equazioni funzionali

(7) $$f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

le quali risultano identicamente soddisfatte quando per le x' vi si pongano i loro valori in funzione delle x, a

(7*) $$x'_i = f_i(x, a)$$

e per le $\underline{c}$ i loro valori in funzione delle a, b

(8) $$c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b),$$

si possono trarre alcune conseguenze preliminari importanti – Dimostriamo in primo luogo che le (8) sono risolubili rispetto alle b, cioè il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots\cdots b_r)}$$

non può esser nullo – In caso contrario infatti si potrebbero determinare tali funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r$ delle a, b da soddisfare il sistema delle r equazioni lineari omogenee

(9) $$\sum_k^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_k} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots\ldots r)$$

Ora derivando l'identità (7) (ove si immaginano eseguite le sostituzioni (7*), (8) rispetto alla b_k), otteniamo:

$$\frac{\partial f_i(x; b)}{\partial b_k} = \sum_{l}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x, \varphi)}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial b_k} ,$$

onde moltiplicando per α_k e sommando da $k=1$ a $k=r$, ne dedurremo per le (9)

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial f_i(x; b)}{\partial b_k} = 0$$

Se in queste identità si pongono per le $\underline{a}$ i valori di un sistema particolare qualunque che non annullino tutte le α, queste risulterebbero delle funzioni B_k delle sole b.

Le funzioni

$$f_i(x; b)$$

sarebbero quindi soluzioni di un'equazione del tipo

$$B_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} + \ldots\ldots + B_r \frac{\partial f}{\partial b_r} = 0 ,$$

onde si concluderebbe (§ 4) che nelle funzioni $f_i(x; b)$ gli $\underline{r}$ parametri b non sarebbero tutti essenziali, contro il supposto -

Per dimostrare che le relazioni (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$, basta osservare che sussiste il teorema seguente:

Se le ∞^r trasformazioni (6) costituiscono un gruppo, anche le loro trasformazioni inverse

$$x'_i = F_i(x_1 \ldots x_n ; a_1 \ldots a_r)$$

costituiscono un gruppo a $\underline{r}$ parametri -

Se indichiamo infatti simbolicamente con S_a la trasformazione (6) corrispondente ai valori $\underline{a}$ dei parametri si ha, poichè le (6) formano un gruppo:

$$S_a S_b = S_c ,$$

e quindi

$$S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1},$$

ciò che dimostra che le trasformazioni inverse formano pure un gruppo – Il numero dei parametri nel gruppo inverso è poi ancora $= r$, poichè nel passaggio da un gruppo al suo inverso il numero dei parametri non può evidentemente aumentare e quindi nemmeno diminuire.(*)

Dopo ciò, siccome le relazioni (8) sono le stesse che pel gruppo primitivo, corrispondono alla eguaglianza $S_a S_b = S_c$ e per l'inverso alla $S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1}$, è chiaro che le (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$ c. d. d.

Abbiamo dunque stabilito il risultato:

(*) Analiticamente si può stabilire questo risultato servendosi delle identità

$$f_i(F_1(x,a) \ldots\ldots F_n(x,a);\ a_1 a_2 \ldots\ldots a_r) = x_i$$

che derivate rapporto ad a_k danno

$$(a) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial f_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_k} = 0$$

Se $a_1 a_2 \ldots\ldots a_r$ non fossero tutti essenziali nelle F, queste soddisferebbero tutte ad un'equazione della forma

$$A_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots\ldots + A_r \frac{\partial F}{\partial a_r} = 0$$

colle A funzioni delle $\underline{a}$. Le identità (a) ci dimostrano che vi soddisferebbero anche le f, nelle quali i parametri a_k non sarebbero dunque tutti essenziali –

Le equazioni (8) $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$, che per una serie ∞^r di trasformazioni costituenti gruppo legano i parametri $\underline{a}, \underline{b}$ delle trasformazioni componenti S_a, S_b a quelli $\underline{c}$ della composta $S_c = S_a S_b$, sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$, cioè i determinanti funzionali

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(a_1, a_2 \cdots a_r)}, \quad \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots b_r)}$$

sono ciascuno diverso dal zero -

§ 7

Equazioni differenziali fondamentali

Procediamo ora ad una ricerca fondamentale per la teoria dei gruppi continui finiti, a dimostrare cioè come le equazioni funzionali (7) si traducano, per le funzioni f_i di trasformazione che figurano in una serie ∞^r (6) costituente un gruppo, in un sistema di equazioni ai differenziali totali, illimitatamente integrabile, cui debbono soddisfare le f_i stesse, considerate come funzioni dei parametri $\underline{a}$ -

Le equazioni funzionali

$$(7) \quad f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

debbono tradursi, come sappiamo, in identità, rispetto alle x, a, b riguardate come indipendenti, quando vi si pongano per le x', c i valori

$$(6) \quad x'_i = f_i(x, a)$$

$$(8) \qquad c_2 = \varphi_2(a, b)$$

Siccome le (8) sono risolubili rispetto alle b (§ 6) possiamo invece riguardare le (7) come identità nelle x, a, c, ove per le x' si pongano i valori (6) e per le b i valori in funzione delle a, c tratti dalle (8) - Derivando la (7) rispetto ad una qualunque delle a in questo concetto, ne deduciamo

$$(10) \qquad \sum_{l}^{1\ldots n} \frac{\partial f_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial a_k} + \sum_{s}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i}{\partial b_s} \frac{\partial b_s}{\partial a_k} = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Poiché il determinante funzionale

$$J = \frac{\partial(f_1 f_2 \ldots f_n)}{\partial(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)}$$

non è zero, possiamo risolvere le n equazioni (10) lineari in

$$\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \frac{\partial x'_2}{\partial a_k}, \ldots \ldots \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$$

rispetto a queste derivate - Se indichiamo con θ_{il} il quoziente del complemento algebrico di $\frac{\partial f_i}{\partial x'_l}$ nel determinante J per il determinante stesso, la risoluzione delle (10) ci dà

$$\frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = -\sum_{s}^{1\ldots r} \sum_{i}^{1\ldots n} \theta_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial b_s} \frac{\partial b_s}{\partial a_k} \quad -$$

Ora la somma

$$-\sum_{i}^{1\ldots n} \theta_{ij} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_s}$$

è una certa funzione delle x', b che indichiamo con $\Phi_{sj}(x', b)$, mentre la derivata $\frac{\partial b_s}{\partial a_k}$ è una funzione delle a, b, che si può calcolare dalle (8), e che indichiamo

con

$$\frac{\partial b_s}{\partial a_k} = \psi_{sk}(a, b)$$

Con queste notazioni le formole superiori diventano

$$(11) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1 \dots r} \psi_{sk}(a, b) \Phi_{sj}(x', b)$$

Queste, come le (7) da cui sono tratte per derivazione, sono identicamente soddisfatte quando vi si ponga

$$x'_j = f_j(x, a),$$

poichè le x, a, b sono affatto indipendenti.

Nei primi membri delle (11)

$$\frac{\partial f_j(x, a)}{\partial a_k}$$

non compariscono le b, onde si vede che anche nei secondi possono essere solo apparenti. E se diamo quindi alle b un sistema fisso di valori, del resto arbitrari

$$b_i = b_i^{(0)},$$

e poniamo

$$\Phi_{sj}(x', b^{(0)}) = \xi_{sj}(x'_1 x'_2 \dots x'_n)$$

$$\psi_{sk}(a, b^{(0)}) = \psi_{sk}(a_1 a_2 \dots a_r)$$

le (11) ci danno il cercato sistema di equazioni fondamentali

$$(A) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1 \dots r} \xi_{sj}(x') \psi_{sk}(a)$$

$$\begin{cases} j = 1, 2, \dots n \\ k = 1, 2, \dots r \end{cases},$$

cui soddisfano le funzioni

§ 5

Esempi di gruppi continui finiti

Per illustrare i concetti generali posti nel § precedente addurremo alcuni semplici esempi di gruppi continui tolti dalla geometria ove si presentano nel modo più intuitivo -

1° Se una figura si muove nello spazio senza cangiare di forma, le coordinate x' y' z' di ogni punto della figura nella nuova posizione si esprimono per funzioni lineari intere delle coordinate primitive x, y, z - Supposti assi ortogonali, le formole si scrivono:

$$a)\quad \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c \end{cases}$$

dove le nove costanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa e si esprimono quindi per tre sole indipendenti, per es. gli angoli θ, φ, ψ Euleriani. La totalità dei movimenti rigidi dello spazio, rappresentata dalle formole (a) dove

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

percorre tutte le sostituzioni ortogonali destrorse ed a, b, c

attennono tutti i valori possibili, costituisce quindi un gruppo continuo finito con 6 parametri essenziali. È chiaro che in questo gruppo esiste la trasformazione identica ed insieme ad ogni trasformazione la sua inversa.

2° Se a tutti i movimenti α) associamo la simmetria rispetto per es. al piano xy data dalle formole

$$x'=x\ ,\ y'=y\ ,\ z'=-z$$

otteniamo una seconda serie di trasformazioni che differisce dalla α) solo in questo che le corrispondenti sostituzioni ortogonali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono sinistrorse. Le due serie insieme ci forniscono un semplice esempio di gruppo misto.

3° I movimenti delle figure piane sul proprio piano formano un gruppo continuo a tre parametri; insieme ai ribaltamenti ci danno un gruppo misto.

Il primo è rappresentato analiticamente dalle formole

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\,\mathrm{sen}\,\alpha+a \\ y'=x\,\mathrm{sen}\,\alpha+y\cos\alpha+b\ , \end{cases}$$

il secondo associando a queste le altre

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha+a \\ y'=x\,\mathrm{sen}\,\alpha-y\cos\alpha+b \end{cases}$$

4° Se al gruppo totale dei movimenti dello spazio associamo una similitudine

$$x'=kx\ ,\ y'=ky\ ,\ z'=kz$$

§ 5

Esempi di gruppi continui finiti

Per illustrare i concetti generali posti nel § precedente adduciamo alcuni semplici esempi di gruppi continui tolti dalla geometria ove si presentano nel modo più intuitivo -

1° Se una figura si muove nello spazio senza cangiare di forma, le coordinate x' y' z' di ogni punto della figura nella nuova posizione si esprimono per funzioni lineari intere delle coordinate primitive x, y, z - Supposti assi ortogonali, le formole si scrivono:

$$(a)\quad \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c \end{cases}$$

dove le nove costanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa e si esprimono quindi per tre sole indipendenti, per es. gli angoli θ, φ, ψ Euleriani. La totalità dei movimenti rigidi dello spazio, rappresentata dalle formole (a) dove

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

percorre tutte le sostituzioni ortogonali destrorse ed a, b, c

ottengono tutti i valori possibili, costituisce quindi un gruppo continuo finito con 6 parametri essenziali. È chiaro che in questo gruppo esiste la trasformazione identica ed insieme ad ogni trasformazione la sua inversa.

2° Se a tutti i movimenti α) associamo la simmetria rispetto per es. al piano xy data dalla formola

$$x' = x\ ,\quad y' = y\ ,\quad z' = -z$$

otteniamo una seconda serie di trasformazioni che differisce dalla α) solo in questo che le corrispondenti sostituzioni ortogonali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono sinistrorse. Le due serie insieme ci forniscono un semplice esempio di gruppo misto.

3° I movimenti delle figure piane sul proprio piano formano un gruppo continuo a tre parametri; insieme ai ribaltamenti ci danno un gruppo misto.

Il primo è rappresentato analiticamente dalle formole

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha + a \\ y' = x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + b\ , \end{cases}$$

il secondo associando a queste le altre

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha + a \\ y' = x\,\text{sen}\,\alpha - y\cos\alpha + b \end{cases}$$

4° Se al gruppo totale dei movimenti dello spazio associamo una similitudine

$$x' = kx\ ,\quad y' = ky\ ,\quad z' = kz$$

a parametro k variabile, otteniamo un gruppo continuo a 7 parametri, il gruppo delle similitudini.

5° Combinando i movimenti dello spazio con tutte le inversioni per raggi vettori reciproci rispetto alle sfere dello spazio si ottiene un gruppo continuo con 10 parametri, che è il gruppo delle trasformazioni conformi. Secondo un teorema di Liouville, esso contiene tutte e sole le trasformazioni dello spazio che conservano gli angoli.

6° La totalità delle collineazioni dello spazio forma un gruppo continuo con 15 parametri, il così detto gruppo projettivo dell' S_3. In esso formano un sottogruppo a 7 parametri quelle collineazioni che lasciano fissa una conica non degenere, un sottogruppo a 6 parametri quelle che lasciano fissa una quadrica non degenere, in fine un sottogruppo a 3 parametri quelle che riportano in sè una cubica gobba.

Così ancora quelle collineazioni dello spazio che lasciano fisso un complesso lineare non speciale formano un gruppo a 10 parametri.

In tutti gli esempi sopra addotti, le formole di trasformazione sono date da sostituzioni lineari salvo che nell'esempio 5° ove abbiamo sostituzioni quadratiche (*).

(*) È questo un particolare esempio dei gruppi Cremoniani, ove le formole di trasformazione danno le nuove variabili espresse razionalmente per le antiche ed inversamente.

La generalizzazione allo spazio a n dimensioni è immediata – Così le sostituzioni lineari omogenee sopra n variabili

$$(\beta) \qquad x'_i = \sum_k^{1\ldots n} a_{ik}\, x_k \,,$$

cogli n^2 parametri a_{ik}, ci danno evidentemente un gruppo di Lie – Componendo la precedente colla

$$x''_l = \sum_i^{1\ldots n} b_{li}\, x'_i$$

si ha la sostituzione composta

$$x''_l = \sum_k c_{lk}\, x_k \,,$$

dove le c si esprimono per le a, b colle formole

$$c_{lk} = \sum_i a_{ik}\, b_{li} \,.$$

Se nella (β) poniamo fra i parametri a la relazione espressa da

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

avremo evidentemente un sottogruppo con n^2-1 parametri. Se invece facciamo percorrere al modulo a della sostituzione (β) solo le r radici r^{me} dell'unità, r essendo un intero fisso, avremo evidentemente un gruppo misto con r serie di trasformazioni a n^2-1 parametri – Così pure formano un gruppo a $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri le sostituzioni β) ortogonali destrorse –

§. 6

Risolubilità delle equazioni $c_\lambda = \varphi_\lambda(a,b)$ rispetto alle $\underline{a}$ o alle $\underline{b}$

Supponiamo di avere una serie ∞^r di trasformazioni

(6) $x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$

$i = 1, 2 \dots n$

che formano un gruppo — Dalle equazioni funzionali

(7) $f_i(x', b) = f_i(x, c)$

le quali risultano identicamente soddisfatte quando per le x' vi si pongano i loro valori in funzione delle x, a

(7*) $x'_i = f_i(x, a)$

e per le c i loro valori in funzione delle a, b

(8) $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$,

si possono trarre alcune conseguenze preliminari importanti — Dimostriamo in primo luogo che le (8) sono risolubili rispetto alle b, cioè il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \dots b_r)}$$

non può esser nullo — In caso contrario infatti si potrebbero determinare tali funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ delle a, b da soddisfare il sistema delle r equazioni lineari omogenee

(9) $\sum_k^{1 \dots r} \alpha_k \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_k} = 0 \quad (\lambda = 1, 2 \dots r)$

Ora derivando l'identità (7) (ove si immaginano eseguite le sostituzioni (7*), (8)) rispetto alla b_k, otteniamo:

$$\frac{\partial f_i(x;b)}{\partial b_k} = \sum_{l}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x,\varphi)}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial b_k} ,$$

onde moltiplicando per α_k e sommando da $k=1$ a $k=r$, ne dedurremo per le (9)

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial f_i(x;b)}{\partial b_k} = 0$$

Se in queste identità si pongono per le $\underline{a}$ i valori di un sistema particolare qualunque che non annullino tutte le α, queste risulterebbero delle funzioni B_k delle sole b.

Le funzioni

$$f_i(x;b)$$

sarebbero quindi soluzioni di un'equazione del tipo

$$B_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} + \ldots\ldots + B_r \frac{\partial f}{\partial b_r} = 0 ,$$

onde si concluderebbe (§ 4) che nelle funzioni $f_i(x;b)$ gli $\underline{r}$ parametri b non sarebbero tutti essenziali, contro il supposto.

Per dimostrare che le relazioni (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$, basta osservare che sussiste il teorema seguente:

Se le ∞^r trasformazioni (6) costituiscono un gruppo, anche le loro trasformazioni inverse

$$x'_i = F_i(x_1 \ldots x_n ; a_1 \ldots a_r)$$

costituiscono un gruppo a $\underline{r}$ parametri.

Se indichiamo infatti simbolicamente con S_a la trasformazione (6) corrispondente ai valori $\underline{a}$ dei parametri si ha, poichè le (6) formano un gruppo:

$$S_a S_b = S_c ,$$

e quindi

$$S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1},$$

ciò che dimostra che le trasformazioni inverse formano pure un gruppo – Il numero dei parametri nel gruppo inverso è poi ancora $= r$, poiché nel passaggio da un gruppo al suo inverso il numero dei parametri non può evidentemente aumentare e quindi nemmeno diminuire.(*)

Dopo ciò, siccome le relazioni (8) sono le stesse che pel gruppo primitivo, corrispondono alla eguaglianza $S_a S_b = S_c$ e per l'inverso alla $S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1}$, è chiaro che le (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$ c. d. d.

Abbiamo dunque stabilito il risultato:

(*) Analiticamente si può stabilire questo risultato servendosi delle identità

$$f_i\,(F_1(x,a) \ldots\ldots F_n(x,a);\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r) = x_i$$

che derivate rapporto ad a_k danno

$$(a)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial f_i}{\partial F_\lambda}\,\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_k} = 0$$

Se $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r$ non fossero tutti essenziali nelle F_i queste soddisferebbero tutte ad un'equazione della forma

$$A_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots\ldots + A_r \frac{\partial F}{\partial a_r} = 0$$

colle A funzioni delle $\underline{a}$. Le identità (a) ci dimostrano che vi soddisferebbero anche le f, nelle quali i parametri a_r non sarebbero dunque tutti essenziali –

Le equazioni (8) $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$, che per una serie ∞^r di trasformazioni costituenti gruppo legano i parametri $\underline{a}, \underline{b}$ delle trasformazioni componenti S_a, S_b a quelli $\underline{c}$ della composta $S_c = S_a S_b$, sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$, cioè i determinanti funzionali

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(a_1, a_2 \cdots a_r)} \,,\quad \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots b_r)}$$

sono ciascuno diverso da zero -

§ 7

Equazioni differenziali fondamentali

Procediamo ora ad una ricerca fondamentale per la teoria dei gruppi continui finiti, a dimostrare cioè come le equazioni funzionali (7) si traducano, per le funzioni f_i di trasformazione che figurano in una serie ∞^r (6) costituente un gruppo, in un sistema di equazioni ai differenziali totali, illimitatamente integrabile, cui debbono soddisfare le f_i stesse, considerate come funzioni dei parametri $\underline{a}$.

Le equazioni funzionali

$$(7) \qquad f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

debbono tradursi, come sappiamo, in identità, rispetto alle x, a, b riguardate come indipendenti, quando vi si pongano per le x', c i valori

$$(6) \qquad x'_i = f_i(x, a)$$

$$(8) \qquad c_2 = \varphi_2(a, b)$$

Siccome le (8) sono risolubili rispetto alle $\underline{b}$ (§ 6) possiamo invece riguardare le (7) come identità nelle x, a, c, ove per le x' si pongano i valori (6) e per le b i valori in funzione delle a, e tratti dalle (8) - Derivando la (7) rispetto ad una qualunque delle $\underline{a}$ in questo concetto, ne deduciamo

$$(10) \qquad \sum_l^{1\ldots n} \frac{\partial f_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial a_k} + \sum_s^{1\ldots r} \frac{\partial f_i}{\partial b_s} \frac{\partial b_s}{\partial a_k} = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Poichè il determinante funzionale

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)}$$

non è zero, possiamo risolvere le $\underline{n}$ equazioni (10) lineari in

$$\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \frac{\partial x'_2}{\partial a_k}, \ldots\ldots \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$$

rispetto a queste derivate - Se indichiamo con θ_{il} il quoziente del complemento algebrico di $\frac{\partial f_i}{\partial x'_l}$ nel determinante J per il determinante stesso, la risoluzione delle (10) ci dà

$$\frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = - \sum_s^{1\ldots r} \sum_i^{1\ldots n} \theta_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial b_s} \frac{\partial b_s}{\partial a_k} -$$

Ora la somma

$$- \sum_i^{1\ldots n} \theta_{ij} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_s}$$

è una certa funzione delle x', b che indichiamo con $\Phi_{sj}(x', b)$, mentre la derivata $\frac{\partial b_s}{\partial a_k}$ è una funzione delle a, b, che si può calcolare dalle (8), e che indichiamo

con

$$\frac{\partial b_s}{\partial a_k} = \Psi_{sk}(a, b)$$

Con queste notazioni le formole superiori diventano

$$(11) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \Psi_{sk}(a, b)\, \Phi_{sj}(x', b)$$

Queste, come le (7) da cui sono tratte per derivazione, sono identicamente soddisfatte quando vi si ponga

$$x'_j = f_j(x, a),$$

poichè le x, a, b sono affatto indipendenti.

Nei primi membri delle (11)

$$\frac{\partial f_j(x, a)}{\partial a_k}$$

non compariscono le b, onde si vede che anche nei secondi possono essere solo apparenti. E se diamo quindi alle b un sistema fisso di valori, del resto arbitrari

$$b_i = b_i^{(0)},$$

e poniamo

$$\Phi_{sj}(x', b^{(0)}) = \xi_{sj}(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$$

$$\Psi_{sk}(a, b^{(0)}) = \psi_{sk}(a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

le (11) ci danno il cercato sistema di equazioni fondamentali

$$(A) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{sj}(x')\, \psi_{sk}(a)$$

$$\begin{cases} j = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r \end{cases},$$

cui soddisfano le funzioni

$$x'_j = f_j(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

che definiscono il nostro gruppo.

Le nostre equazioni (A) possono anche scriversi sotto la forma equivalente

$$(A^*) \quad dx'_j = \sum_k^{1\dots r}\Big(\sum_s^{1\dots r} \xi_{sj}(x')\psi_{sk}(a)\Big)da_k \qquad (j=1,2,\dots n)$$

e costituiscono un sistema di equazioni di differenziali totali – Negli integrali,

$$(\gamma) \qquad x'_j = f_j(x,a)$$

le n x figurano come costanti arbitrarie, e poichè le (γ) sono risolubili rispetto alle x ne segue che il nostro sistema di equazioni di differenziali totali (A) o (A*) è illimitatamente integrabile

Riepiloghiamo i risultati ottenuti fin qui nel teorema:

Se le equazioni

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$
$$i=1,2,\dots n$$

rappresentano un gruppo con r parametri a essenziali, le funzioni f(x, a), considerate come dipendenti dalle a, soddisfano ad un sistema di equazioni di differenziali totali della forma

$$(A) \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\psi_{sk}(a) = \xi_{1i}(x')\psi_{1k}(a) + \xi_{2i}(x')\psi_{2k}(a) + \dots\dots + \xi_{ri}(x')\psi_{rk}(a)^{(*)};$$

(*) Si osservi la forma particolare dei secondi membri di queste equazioni come somme di (r) prodotti di funzioni

questo sistema è illimitatamente integrabile e le $f_i(x,a)$ ne danno gli integrali generali

Come esempio si prenda il gruppo dei movimenti nel piano (§ 5) rappresentato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos a_3 - x_2 \operatorname{sen} a_3 + a_1 \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} a_3 + x_2 \cos a_3 + a_2 \end{cases}$$

dove x_1, x_2 rappresentano coordinate cartesiane ortogonali e $a_1\ a_2\ a_3$ i parametri - Le equazioni differenziali sono qui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_1} = 1 \qquad \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_2} = 0 \qquad \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_3} = a_2 - x_2' \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1 \qquad \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_3} = x_1' - a_1 \end{cases}$$

e rientrano nella forma generale (A) ponendo

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2' & -x_1' \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

§ 8

Alcune proprietà delle funzioni $\psi_{sk}(a)$, $\xi_{si}(x')$

Abbiamo stabilito il risultato di fondamentale importanza che le funzioni $f_i(x,a)$ che danno una serie ∞^r di trasformazioni

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x,a)$$

¹ delle sole $\underline{a}$ per funzioni delle sole x' -

costituenti un gruppo, soddisfano necessariamente ad un sistema di equazioni differenziali della forma (A). Diciamo però subito che le condizioni espresse dalle (A) necessarie perchè le (6) costituiscano un gruppo non sono a ciò del tutto sufficienti (*) ma si richieggono ancora alcune condizioni complementari che verranno esaminate nel prossimo capitolo. Intanto osserviamo alcune proprietà semplici ma importanti, che si verificano per ogni serie ∞^r di trasformazioni (6), quando siano soddisfatte le equazioni differenziali di un sistema (A), anche se quella serie non costituisce un gruppo.

In primo luogo diciamo che il determinante delle funzioni $\psi_{ik}(a)$

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1r} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{r1} & \psi_{r2} & \cdots & \psi_{rr} \end{vmatrix}$$

è necessariamente diverso da zero. In caso contrario infatti

(*) Un esempio dimostra subito la cosa. Il sistema semplice

$$\frac{dx_1'}{da} = \frac{x_1'}{x_2'} \quad , \quad \frac{dx_2'}{da} = 1 \; ,$$

con un solo parametro $\underline{a}$, ha la forma tipica (A) (ove si faccia $\xi_{11} = \frac{x_1'}{x_2'}$, $\xi_{12} = 1$, $\psi_{11}(a) = 1$); ma gli integrali generali

$$x_1' = x_1(x_2 + a) \qquad x_2' = x_2 + a$$

non danno le trasformazioni di un gruppo.

potremo determinare r funzioni

$$A_1,\ A_2 \dots\dots A_r$$

delle a, non tutte nulle, tali da soddisfare il sistema delle r equazioni lineari omogenee

$$\sum_k^{1\dots r} A_k\, \psi_{sk}(a)=0 \qquad (s=1,2\dots r)$$

Dalle equazioni differenziali (A) risulterebbero allora le seguenti

$$\sum_k^{1\dots r} A_k \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k}=0 \qquad (i=1,2,\dots n)\ ;$$

dunque (§ 2) gli r parametri a non sarebbero essenziali, contro l'ipotesi.

Dopo ciò, se consideriamo le r equazioni (A) che si ottengono tenendo fisso i e ponendo $k=1,2,\dots r$, è chiaro che potremo risolverle appunto a

$$\xi_{1i} \quad \xi_{2i} \dots\dots \xi_{ri}$$

e le formole risolute prenderanno l'aspetto seguente:

$$\text{(B)} \qquad \xi_{ji}(x')=\sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}\,,$$

dove con α_{jk} è indicato il complemento algebrico di ψ_{jk} in ψ, diviso per ψ stesso.

Segue di qui un risultato importante per il seguito e cioè che è impossibile determinare r costanti non tutte nulle

$$e_1 \quad e_2 \dots\dots e_r$$

che soddisfino le r equazioni

$$(12) \qquad \sum_j^{1\dots r} e_j\, \xi_{ji}(x')=0 \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Le (12) ci darebbero infatti per le (B) le equazioni

$$\sum_k^{1\dots r}\left(\sum_j^{1\dots r} e_j\,\alpha_{jk}(a)\right)\frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k}=0$$

e i parametri $a_1\, a_2 \dots a_r$ non sarebbero ~~tutti~~ essenziali -

Formuliamo i risultati ottenuti nel teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x,a)$$

soddisfa ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A), 1° il determinante delle ψ è necessariamente diverso da zero, e le (A), risolute rapporto alle ξ possono porsi sotto la forma equivalente (B), 2° è impossibile determinare r costanti $e_1, e_2 \dots e_r$ (non nulle) che soddisfino alle n equazioni lineari

$$\sum_j^{1\dots r} e_j\,\xi_{ji}(x')=0 \qquad (i=1,2\dots n)$$

§. 9

Gruppi ad un parametro

Cominciamo dall'applicare questi primi principii della teoria al caso dei gruppi ad un parametro, questi formano in certa guisa gli elementi con cui si compongono i gruppi continui finiti (ed anche infiniti) e si può dire che compiono nella teoria generale dei gruppi continui un ufficio analogo a quello dei gruppi di potenze nella teoria dei gruppi discontinui -

Se la serie ∞^1 di trasformazioni

(13) $$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots x_n ; a) \qquad (i=1,2 \dots n)$$

con un parametro a costituisce un gruppo, pel teorema fondamentale del § 7 le x'_i, considerate come funzioni di a soddisferanno ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie della forma

(14) $$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a) \cdot \xi_i(x'_1 x'_2 \dots x'_n) \qquad i = 1, 2 \dots \dots n$$

e ne costituiranno l'integrale generale –

Per determinare completamente le $f_i(x, a)$ basterà dunque conoscere la forma che queste f_i, ossia le x'_i, assumono per un particolare valore di a, diciamo per $a = a_0$

È chiaro che il sistema integrale delle (14), cioè delle equazioni

$$\frac{dx'_1}{\xi_1} = \frac{dx'_2}{\xi_2} = \dots \dots = \frac{dx'_n}{\xi_n} = \psi(a)\, da$$

può porsi sotto la forma risoluta rispetto alle costanti arbitrarie

(15) $$\begin{cases} \Omega_1(x'_1, x'_2 \dots \dots x'_n) = C_1 \\ \Omega_2(x'_1 x'_2 \dots \dots x'_n) = C_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Omega_{n-1}(x'_1 x'_2 \dots \dots x'_n) = C_{n-1} \\ \Omega_n(x'_1 x'_2 \dots \dots x'_n) = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\,da + C_n \end{cases}$$

dove le $\Omega_i(x'_1 x'_2 \dots x'_n)$ sono certe n funzioni indipendenti delle $x'_1\ x'_2 \dots x'_n$ e le $C_1, C_2 \dots C_n$ sono costanti arbitrarie –

Supponiamo ora che nella serie (13) sia contenuta la sostituzione identica e corrisponda al valore a_0 di a, talchè si abbia

$$x_i' = x_i \quad \text{per } a = a_0$$

Facendo $a = a_0$ nelle (15) ne viene

$$C_i = \Omega_i(x_1, x_2 \dots x_n)$$

ed il sistema integrale (15), cangiato per semplicità il parametro a in

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da\,;$$

prende la forma

$$(16) \begin{cases} \Omega_i(x_1' \, x_2' \dots x_n') = \Omega_i(x_1 \, x_2 \dots x_n) \\ \qquad i = 1, 2 \dots\dots n-1 \\ \Omega_n(x_1' \, x_2' \dots x_n') = \Omega_n(x_1 \, x_2 \dots x_n) + t\,, \end{cases}$$

che è perfettamente equivalente alle (13) sotto l'ipotesi

$$x_i' = x_i \quad \text{per } t = 0 \quad (a = a_0)$$

Le equazioni (16) manifestano nel modo più semplice la proprietà di gruppo, poichè se cangiamo le variabili x_i nelle

$$y_i = \Omega_i(x_1, x_2 \dots x_n)$$
$$i = 1, 2 \dots n\,,$$

essi prendono la forma semplicissima

$$y_1' = y_1\,,\ y_2' = y_2\,, \dots\dots y_{n-1}' = y_{n-1}$$
$$y_n' = y_n + t$$

Questa trasformazione si dirà una traslazione dello spazio a n dimensioni $(y_1, y_2 \dots y_n)$ –

In generale se in un gruppo qualunque G si fa contemporaneamente sulle variabili primitive e sulle trasformate una medesima sostituzione T, ed anche, se si vuole, si cangiano i parametri in modo arbitrario, le considerazioni alla fine del §1 provano che le nuove trasformazioni percorrono nuovamente un gruppo, il gruppo $T^{-1}GT$ - Due tali gruppi, ottenuti l'uno dall'altro con un cangiamento di variabili e di parametri diconsi simili -

Possiamo dunque enunciare questo primo risultato: Se un gruppo continuo ad un parametro contiene l'identità, esso è simile ad un gruppo di traslazioni e le sue trasformazioni sono permutabili fra loro e a due a due inverse l'una dell'altra -

Supponiamo ora, più in generale, di avere soltanto una serie ∞^1 di trasformazioni (13), che soddisfi ad un sistema di equazioni differenziali della forma (14) e indichiamo con

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\ \cdots\cdots\ \varphi_n(x)$$

le funzioni delle x in cui si riducono le $f_i(x, a)$ per $a = a_0$: il sistema (15) equivalente alle (13) si scriverà:

$$\Omega_i(x_1'\, x_2' \cdots x_n') = \Omega_i(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\Omega_n(x_1'\, x_2' \cdots x_n') = \Omega_n(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n) + t$$

Questa trasformazione si ottiene eseguendo prima la trasformazione

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n), \dots\dots\dots y_n = \varphi_n(x_1, x_2 \dots\dots x_n);$$

e di l'altra

$$\begin{cases} \Omega_i(x_1', x_2' \dots x_n') = \Omega_i(y_1, y_2 \dots y_n) & (i=1,2,\dots n-1) \\ \Omega_n(x_1', x_2' \dots x_n') = \Omega_n(y_1, y_2 \dots y_n) + t \end{cases}$$

La prima è una trasformazione fissa della serie (13) corrispondente ad $a = a_0$) e la seconda, variando t, genera un gruppo della specie sopra considerata. Abbiamo dunque il teorema:

Se una serie ∞^1 di trasformazioni (13) soddisfa ad equazioni differenziali del tipo (14), le sue trasformazioni si ottengono componendo una trasformazione fissa della serie stessa con tutte le trasformazioni del gruppo ad un parametro (colla sostituzione identica) definito dalle equazioni differenziali (14) stesse

§. 10

Trasformazione infinitesima di un G_1

Ritorniamo alla considerazione dei gruppi ad un parametro contenenti l'identità e quindi contenenti insieme ad ogni trasformazione la sua inversa (§ 9); tali gruppi s'indicheranno d'ora innanzi col simbolo G_1, l'indice riferendosi al numero dei parametri. Le formole relative ad un tal gruppo G_1 si ottengono, come si è visto, integrando un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$$

colle condizioni iniziali

$$x'_i = x_i \quad \text{per } t = 0$$

Se funzioni $\xi_i(x')$ sono supposte analitiche, e se si ammette di più che il punto $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sia un punto regolare per queste funzioni, sappiamo che gli integrali x'_i saranno sviluppabili in serie di potenze di t secondo la formola

$$x'_i = x_i + \xi_i(x) \cdot t + \frac{t^2}{2} \sum_k^{1\ldots n} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \ldots\ldots\ldots$$

Possiamo scrivere questa in modo più espressivo introducendo, per una funzione qualunque $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ delle variabili x, il simbolo d'operazione

$$Xf = \sum_k^{1\ldots n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

e indicando con

$$X^2 f,\ X^3 f, \ldots\ldots\ldots$$

il risultato dell'operazione stessa ripetuta due, tre ...... volte; lo sviluppo precedente prende allora la forma:

$$(17) \qquad x'_i = x_i + t X x_i + \frac{t^2}{1.2} X^2 x_i + \frac{t^3}{1.2.3} X^3 x_i + \ldots\ldots\ldots$$

Più in generale, se vogliamo sviluppare secondo potenze di t una funzione qualunque $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, regolare nel punto $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, avremo

$$(18) \qquad f(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = f(x_1\, x_2 \ldots x_n) + t Xf + \frac{t^2}{1.2} X^2 f + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^3}{\underline{|3}} X^3 f + \ldots\ldots$$

Qualche volta indicheremo questo sviluppo per brevità col simbolo

$$f(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = e^{tX} \cdot f$$

dove si svilupperà formalmente e^{tX} colla serie esponenziale

e le potenze di X si considereranno poi come operanti sulla f.

Consideriamo ora quella trasformazione del gruppo G_1 che corrisponde ad un valore infinitamente piccolo δt del parametro t. Questa trasformazione infinitesima del gruppo, quando si trascurino gli infinitesimi d'ordine superiore a δt, dà alle x gli incrementi infinitesimi

$$\delta x_i = \xi_i \cdot \delta t \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

e quindi ad una funzione qualunque f l'incremento

$$\delta f = Xf \cdot \delta t$$

È chiaro che l'espressione effettiva del simbolo Xf determina di per sè completamente la trasformazione infinitesima, poichè fornisce i valori delle ξ. Perciò il simbolo stesso Xf è riguardato da Lie come simbolo della trasformazione stessa, che si dice quindi la trasformazione infinitesima Xf. Naturalmente se si cangia il parametro t in un nuovo τ ponendo

$$t = \varphi(\tau)$$

i valori delle ξ vengono moltiplicati contemporaneamente per un fattore costante, cioè pel valore di $\frac{dt}{d\tau}$ per $t = 0$.

Non si altera dunque una trasformazione infinitesima moltiplicandola per una costante c qualunque.

Si osservi ora che le equazioni differenziali

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', x_2', \dots x_n'),$$

interpretate geometricamente nello spazio a n dimensioni $(x_1' x_2' \dots x_n')$, determinano un sistema ∞^{n-1} di curve integrali; queste diconsi le traiettorie del gruppo, ovvero

anche, secondo Monge, le caratteristiche dell'equazione a derivate parziali

$$Xf = 0$$

Possiamo quindi dire: Il simbolo Xf della trasformazione infinitesima non è altro che la derivata della funzione f calcolata nella direzione della traiettoria del gruppo.

Introdotto così il concetto di trasformazione infinitesima, vediamo che ogni gruppo G_1 contiene una trasformazione infinitesima Xf, determinata a meno di un fattore costante; questa alla sua volta individua perfettamente il gruppo, che viene generato dalla Xf secondo le formule (17) o (18). Il gruppo stesso si indica perciò semplicemente come gruppo Xf.

Formuliamo ancora il teorema alla fine del § 9 sotto la nuova forma:

Ogni gruppo ad un parametro

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a)$$

individua una trasformazione infinitesima Xf, e le sue trasformazioni si ottengono tutte combinando una sua trasformazione fissa colle trasformazioni del gruppo G_1, contenente l'identità, generato da Xf.

§ 11

Cangiamento di variabili nelle trasformazioni infinitesime

Si è visto come un gruppo G_1^r, contenente l'identità, risulta perfettamente determinato dalla sua trasformazione infinitesima Xf. Ora se, mediante un cangiamento di variabili indipendenti espresso dalle formole

$$(19) \qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2 \cdots x_n)$$

che fanno passare dalle antiche variabili x alle nuove y, si trasforma il gruppo G_1 in un gruppo simile (§ 9) Γ_1, si può domandare come si calcolerà la trasformazione infinitesima Yf del gruppo Γ_1. È facile vedere che il nuovo simbolo Yf si otterrà semplicemente esprimendo nell'antico Xf le x per le y. Se supponiamo infatti

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = F(y_1, y_2 \cdots y_n),$$

avremo

$$Xf = \sum_\nu^{1\cdots n} \frac{\partial F}{\partial y_\nu} \cdot Xy_\nu$$

Espresse le Xy_ν per le y, si ponga

$$Xy_\nu = \eta_\nu(y_1, y_2 \cdots y_n)$$

e

$$YF = \sum_\nu^{1\cdots n} \eta_\nu \frac{\partial F}{\partial y_\nu};$$

qualunque sia f, si avrà identicamente

$$Xf = YF,$$

purchè le x, y siano legate dalle formole di trasformazione (19) - Sarà quindi anche

$$X^2 f = Y^2 F\,,\quad X^3 f = Y^3 F \;----$$

in generale

$$X^s f = Y^s F\,.$$

In conseguenza la (18) si muta in

$$F(y_1', y_2' \cdots y_n') = F(y_1, y_2 \cdots y_n) + tYF + \frac{t^2}{1.2} Y^2 F + \cdots =$$
$$= e^{tY} . F\,,$$

formola che vale per qualunque F e dimostra la proprietà enunciata.

Così ogni trasformazione finita

$$x_i' = x_i + tXx_i + \frac{t^2}{1.2} X^2 x_i + \cdots$$

di G_1 si muta pel gruppo trasformato nell'altra

$$y_i' = y_i + t\eta_i + \frac{t^2}{1.2} Y\eta_i + \cdots,$$

il valore di t essendo lo stesso nelle due formole

§. 12

Le serie ∞^r di trasformazioni e le relative trasformazioni infinitesime

---

Scopo delle ricerche che andiamo ora a fare è quello di estendere ai gruppi continui finiti a più parametri i risultati sopra conseguiti pei gruppi ad un parametro. In particolare dimostreremo che un gruppo ad r parametri, che contenga l'identità e insieme ad ogni trasformazione la sua inversa, si genera mediante r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f\ ,\ X_2 f, \dots\dots X_r f$$

fra di loro linearmente indipendenti, nel senso che non abbia luogo alcuna identità della forma

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots\dots + e_r X_r f = 0\,,$$

dove le e siano costanti numeriche.

Per stabilire questi risultati fondamentali è utile premettere alcune considerazioni generali sulle serie ∞^r di trasformazioni in generale:

$$(20) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n\,;\ a_1, a_2 \dots\dots a_r)$$

e le trasformazioni infinitesime che esse determinano.

Così stabiliremo, fra altro, nuovamente le equazioni differenziali (A) del § 7, riconoscendone il significato intrinseco.

Prendiamo una trasformazione qualunque S_a (*) della serie (20), ed una trasformazione infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$ della medesima serie, ove i parametri a hanno ricevuto incrementi infinitesimi δa. Se osserviamo che si ha

$$S_{a+\delta a} = S_a \cdot (S_a^{-1} S_{a+\delta a})$$
$$S_{a+\delta a} = (S_{a+\delta a} S_a^{-1}) \cdot S_a\,,$$

vediamo che dalla S_a si può passare alla infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$ o eseguendo prima la S_a, indi la tra-

---

(*) Indichiamo al solito simbolicamente con S_a quella trasformazione che corrisponde ai valori $a_1, a_2 \dots a_r$ dei parametri in (20).

sformazione infinitesima

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a} \,,$$

od anche eseguendo per prima la trasformazione infinitesima $S_{a+\delta a} S_a^{-1}$ e poi la S_a - Rispetto a queste due trasformazioni infinitesime si osservi che esse non appartengono in generale alla serie (20) e che l'una è la trasformazione dell'altra per mezzo della S_a, come si vede dalla formola

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a} = S_a^{-1} (S_{a+\delta a} S_a^{-1}) S_a$$

Si possono scrivere facilmente le espressioni analitiche effettive di queste due trasformazioni infinitesime. Se si suppone infatti che le (20), risolute rispetto alle x, danno

(20*) $\qquad x_i = F_i(x_1', x_2' \dots x_n'; a_1 a_2 \dots a_r)$,

la prima trasformazione $S_a^{-1} S_{a+\delta a}$ sarà data da

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a}) \quad x_i' = f_i\left(F_1(x,a), F_2(x,a) \dots F_n(x,a); a_1+\delta a_1 , a_2+\delta a_2, \dots a_r+\delta a_r\right)$$

e la seconda da

$$S_{a+\delta a} S_a^{-1}) \quad x_i' = F_i\left(f_1(x, a+\delta a), f_2(x, a+\delta a) \dots f_n(x, a+\delta a); a_1, a_2 \dots a_r\right)$$

Siccome le (20), (20*) sono inverse l'una dell'altra, si può scrivere per queste

$$(21) \quad S_a^{-1} S_{a+\delta a}) \quad x_i' = x_i + \sum_k^{1\dots r} \left[\frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k}\right]_{\xi = F(x,a)} \cdot \delta a_k$$

$$S_{a+\delta a} S_a^{-1}) \quad x_i' = x + \sum_k^{1\dots r} \delta a_k \sum_\nu^{1\dots n} \frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k} \left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial \xi_\nu}\right]_{\xi=f(x,a)}$$

L'espressione della seconda può semplificarsi osservando che dall'identità

$$F_i\left(f_1(x,a), f_2(x,a) \cdots\cdots f_n(x,a)\right) = x_i \;,$$

derivando rapporto ad a_k deduciamo

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=f(x,a)} + \sum_\nu^{1\dots n} \left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial \xi_\nu}\right]_{\xi=f(x,a)} \cdot \frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k} = 0 \,,$$

onde risulta per la $S_{a+\delta a} S_a^{-1}$

$$(21^*) \quad S_{a+\delta a} S_a^{-1}) \quad x_i' = x_i - \sum_k \left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=f(x,a)} \cdot \delta a_k$$

Se immaginiamo fissate le $\underline{a}$ e variabili ad arbitrio le δa, le (21), (21*) coordinano alla S_a due serie di trasformazioni infinitesime mediante le quali si passa da S_a a qualunque altra trasformazione infinitamente vicina nella serie (20). Ora osserviamo che la (21) si scrive, colla notazione delle trasformazioni infinitesime,

$$Z\Phi = \sum_k^{1\dots r} \delta a_k \sum_i^{1\dots n} \left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

ed è quindi una combinazione lineare delle $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime

$$(22) \qquad Z_k\Phi = \sum_i \left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Queste, per valori qualunque delle $\underline{a}$ sono certo fra

loro linearmente indipendenti, altrimenti gli r parametri a non sarebbero tutti essenziali. La stessa cosa vale naturalmente per la serie (21*), la quale non è altro che una trasformata della serie (21).

Viceversa è chiaro che in una serie qualunque (21) di trasformazioni, se le r trasformazioni infinitesime Z_k date dalla (22) sono indipendenti, gli r parametri a saranno essenziali.

Si osservi infine che la trasformazione infinitesima generica (21)

$$Z\Phi = \sum_k^{1\ldots r} \delta a_k Z_k \Phi ,$$

dipendendo dagli $r-1$ rapporti delle δa percorre una serie ∞^{r-1} di trasformazioni infinitesime distinte.

Riepilogando i risultati ottenuti abbiamo adunque: Ogni serie (20) ∞^r di trasformazioni coordina ad ogni sua trasformazione S_a due serie (21), (21*) di ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime, mediante le quali si passa, nel modo indicato, dalla S_a a tutte le trasformazioni infinitamente vicine nella serie stessa.

§. 13

Caso particolare di un gruppo

Supponiamo ora che la serie ∞^r data dalle (20) costituisca un gruppo. Allora due trasformazioni qualunque S_a, S_b della serie si compongono in una

terza trasformazione S_c della serie stessa:

$$(23) \qquad S_a S_b = S_c ,$$

dove i parametri $\underline{c}$ sono certe funzioni di a, b

$$(24) \qquad c_\lambda = \psi_\lambda(a_1, a_2 \cdots a_r ; b_1, b_2 \cdots b_r)$$
$$\lambda = 1, 2, \cdots r$$

e queste relazioni, come abbiamo dimostrato al § 6, sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle b - Del resto ciò risulta ora subito dall'eguaglianza simbolica (23), osservando che, se teniamo fisse le $\underline{a}$ e facciamo variare arbitrariamente le b, la S_c percorrerà, come la S_b, una serie ∞^r di trasformazioni e perciò le $\underline{r}$ funzioni $\underline{c}$ sono indipendenti rispetto alle b, cioè

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots b_r)} \neq 0 ;$$

analogamente dicasi di $\dfrac{\partial(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_r)}{\partial(a_1, a_2 \cdots a_r)}$ -

Diamo ora tanto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$ incrementi arbitrari $\delta a, \delta b$; basterà calcolare i corrispondenti incrementi δc dalle (24) colle formole

$$\delta c_\lambda = \sum_k^{1 \cdots r} \left(\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b_k} \delta b_k \right)$$

e si avrà

$$S_{a+\delta a} \; S_{b+\delta b} = S_{c+\delta c}$$

Ora prendiamo i $\delta a, \delta b$ così legati fra loro che ne risultino nulli i δc, cioè

$$(25)\qquad \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial z_\lambda}{\partial a_k}\,\delta a_k + \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial z_\lambda}{\partial b_k}\,\delta b_k = 0$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots\ldots r$$

e allora risulterà

$$S_{a+\delta a}\, S_{b+\delta b} = S_c = S_a S_b\,,$$

ossia

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a} \cdot S_{b+\delta b}\, S_b^{-1} = 1\,,$$

ciò che dimostra che la $S_{b+\delta b} S_b^{-1}$ è la inversa di $S_a^{-1} S_{a+\delta a}$ - Ma evidentemente l'inversa di $S_{b+\delta b} S_b^{-1}$ si ottiene cangiando i segni di tutte le δb, e però come conseguenza delle (25) abbiamo.

$$(26)\qquad S_a^{-1} S_{a+\delta a} = S_{b-\delta b}\, S_b^{-1}$$

Si osservi ora che nelle (25) possiamo prendere ad arbitrio le δa e trarne le δb o inversamente; ne segue che la trasformazione a sinistra nella (26) può identificarsi con una qualunque della serie (21), e così quella a destra con una qualunque della serie (21*).

In questo caso dunque le due serie di trasformazioni coincidono. Ma di più se teniamo fisse le b e facciamo variare ad arbitrio le a, la (26) dimostra che la prima serie di trasformazioni infinitesime (21), coordinata alla S_a, rimane la stessa al variare di S_a e altrettanto naturalmente accade della seconda serie (21*).

Concludiamo adunque: Ad ogni gruppo di trasformazioni a r parametri è coordinata una serie perfettamente determinata di ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime, per le

quali moltiplicando sia a destra che a sinistra la S_a si ottengono tutte le trasformazioni del gruppo infinitamente vicine alla S_a –

§ 14

Nuova deduzione delle equazioni differenziali fondamentali (A) §7

Traduciamo ora in formole l'eguaglianza simbolica (26), sostituendo per le trasformazioni infinitesime dei due membri le loro espressioni effettive ~~date~~ dalle (21), (21*), ed avremo:

$$(27)\qquad \sum_k^{1\ldots r}\left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)}\cdot\delta a_k=\sum_j^{1\ldots r}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial b_j}\right]_{\xi=f(x,b)}\cdot\delta b_j$$

$$i=1,2\ldots n,$$

relazioni che sono una conseguenza delle (25) – Ora risolvendo le dette equazioni (25) rapporto alle δb scriviamo

$$(28)\qquad \delta b_j=\sum_k^{1\ldots r}\psi_{jk}(a,b)\,\delta a_k$$

e le ψ_{jk} avranno precisamente il significato loro attribuito al §7 poichè rappresentano le derivate delle $\underline{b}$ rapporto alle $\underline{a}$, quando si tengano fisse le $\underline{c}$ –

Sostituendo i valori (28) nelle (27) e ricordando che le δa sono indipendenti, ne dedurremo

$$(29)\qquad \left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)}=\sum_j^{1\ldots r}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial b_j}\right]_{\xi=f(x,b)}\cdot\psi_{jk}(a,b)$$

Se introduciamo ora la notazione

$$(a) \qquad \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial b_j}\right]_{\xi = f(x, b)} = \Phi_{ji}(x, b),$$

poi nella (29) cangiamo x_i in $x_i' = f_i(x, a)$, otteniamo le equazioni seguenti:

$$(30) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1\ldots r} \Phi_{ji}(x', b)\,\psi_{jk}(a, b).$$

Queste sono le equazioni stesse (11) che abbiamo già stabilito al §7, poiché non solo le $\psi_{jk}(a, b)$ hanno il significato loro attribuito al §7, ma anche le $\Phi_{ji}(x', b)$ come risulta dalle osservazioni seguenti: Si ha identicamente

$$(b) \qquad [F_i(\xi, b)]_{\xi = f(x, b)} = x_i$$

e quindi derivando rapporto a b_j

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial b_j}\right]_{\xi = f(x, b)} = -\sum_\lambda \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x, b)} \cdot \frac{\partial f_\lambda(x, b)}{\partial b_j}$$

onde per la (a)

$$\Phi_{ji}(x, b) = -\sum_\lambda \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x, b)} \cdot \frac{\partial f_\lambda(x, b)}{\partial b_j}.$$

Basterà dunque dimostrare, per provare l'asserita coincidenza, che si ha

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x, b)} = \theta_{\lambda i},$$

essendo $\theta_{\lambda i}$ il quoziente del complemento algebrico di $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}$ nel determinante funzionale $J = \frac{\partial(f_1 f_2 \cdots f_n)}{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)}$

diviso per J stesso. Ma ciò risulta subito dalle (b) derivate rapporto ad una x qualunque, per es. x_ℓ, il che dà:

$$\sum_\lambda^{1\ldots n}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi=f(x,b)} \cdot \frac{\partial f_\lambda(x,b)}{\partial x_\ell} = \varepsilon_{\lambda\ell} \quad (*)$$

Ottenute così nuovamente le (30), che coincidono colle (**) § 1, basterà dare ancora alle b valori fissi qualunque per dedurne le equazioni differenziali fondamentali (A) § 7

$$(A) \quad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x')\,\psi_{sk}(a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots n \\ k = 1, 2 \ldots r \end{cases}$$

Queste appaiono, colla nuova deduzione, sotto un nuovo aspetto come la traduzione in formole dell'equazione simbolica (26) alla quale equivalgono.

§ 15

Le r trasformazioni infinitesime $X_\lambda f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{\lambda i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$

Se supponiamo soltanto che la serie ∞^r di trasformazioni (20) verifichi il sistema di equazioni differenziali (A), la qual cosa avverrà certamente in particolare se la serie costituisce un gruppo, potremo porre

---

(*) Si ricordi il significato di $\varepsilon_{\lambda\ell}$:

$$\varepsilon_{\lambda\ell} = 0 \text{ per } \lambda \neq \ell$$
$$\varepsilon_{\lambda\ell} = 1 \text{ per } \lambda = \ell$$

sotto altra forma le r trasformazioni infinitesime del § 12

$$Z_1 \varphi \ , Z_2 \varphi \ldots\ldots Z_r \varphi$$

mediante le quali si combinano linearmente tutte le trasformazioni infinitesime (21) che fanno passare da una trasformazione S_a alla infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$ —

Essendo soddisfatte le (A), gli incrementi δx_i che ricevono le x per una qualunque trasformazione infinitesima (21) sono dati da

$$\delta x_i = \sum_k^{1\ldots r} \left[\frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k} \right]_{\xi = F(x,a)} \cdot \delta a_k =$$

$$= \sum_k^{1\ldots r} \delta a_k \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x) \psi_{sk}(a)$$

La più generale trasformazione infinitesima in discorso si scrive dunque:

$$Xf = \sum_{s,k}^{1\ldots r} \delta a_k \psi_{sk}(a) \cdot \sum_i^{1\ldots n} \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i} \ ,$$

ovvero posto

$$\sum_k^{1\ldots r} \psi_{sk}(a) \delta a_k = \lambda_s ,$$

$$Xf = \sum_s^{1\ldots r} \lambda_s \sum_i^{1\ldots n} \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i} \ ,$$

dove le λ sono costanti arbitrarie. Se poniamo

(31) $X_1 f = \sum_i \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \ , \ X_2 f = \sum_i \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i} , \ldots\ldots X_r f = \sum_i \xi_{ri} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

vediamo che la Xf è una combinazione lineare a coefficienti costanti di queste r trasformazioni infinitesime fondamentali

$$X_1 f \ , \ X_2 f , \ldots\ldots X_r f$$

Queste sono linearmente indipendenti, come risulta da quanto abbiamo già detto al § 12, ed anche dalle osservazioni alla fine del § 8 dalle quali segue che non sussiste alcuna identità della forma

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_r X_r f = 0$$

colle e costanti -

Dunque: Se una serie ∞^r di trasformazioni soddisfa le equazioni differenziali (A), si passa da una trasformazione qualunque S_a della serie ad una infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$, componendo la S_a con una trasformazione infinitesima $\sum_s^{1 \ldots r} \lambda_s X_s f$, combinazione lineare a coefficienti λ costanti delle r trasformazioni infinitesime fisse, linearmente indipendenti $X_s f = \sum_i^{1 \ldots n} \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(s = 1, 2 \ldots r)$ -

Se si ricorda (§ 10) che una trasformazione infinitesima genera un gruppo ad un parametro, è ben naturale domandare ora se la proprietà sopra dimostrata per la trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$ vale anche per le trasformazioni *finite* del gruppo G_1 ad un parametro da questa generato, se cioè componendo S_a con una trasformazione finita di G_1 si ottiene ancora una trasformazione della serie primitiva -

La risposta è affermativa come andiamo ora a dimostrare, e da questo risultato si deducono conseguenze di fondamentale importanza per la teoria dei gruppi -

§ 16

Teorema fondamentale per le serie di trasformazioni che soddisfano le (A)

Per dimostrare quanto abbiamo sopra asserito, cominciamo dall'osservare che essendo per valori generici delle a diverso da zero il determinante delle ψ, possiamo, come già abbiamo fatto al § 8, risolvere le (A) rispetto alle ξ e scriverle sotto la forma equivalente

$$(B). \qquad \xi_{ji}(x') = \sum_k^{1 \ldots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}$$

La trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$ scritta per disteso è data da

$$\delta x_i = \delta t \sum_s^{1 \ldots r} \lambda_s \xi_{si}(x) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

e calcolata dalle (A) si scrive

$$\delta x_i = \sum_{s.k}^{1 \ldots r} \xi_{si}(x) \psi_{sk}(a) \delta a_k,$$

onde paragonando si ha

$$\sum_s^{1 \ldots r} \xi_{si} (\lambda_s \delta t - \sum_k^r \psi_{sk}(a) . \delta a_k) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

e però (*)

$$\sum_k \psi_{sk}(a) \delta a_k = \lambda_s \delta t$$

(*) altrimenti le $X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_r f$ non sarebbero indipendenti -

Risolvendo rapporto alle δa_k, abbiamo le formole

$$(c) \qquad \delta a_k = \delta t \sum_s^{1\ldots r} \alpha_{sk}(a)\,\lambda_s \;;$$

colle quali sono da calcolarsi gli incrementi delle a nel passaggio dalla S_a alla $S_{a+\delta a}$ che risulta dalla composizione di S_a colla trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$

Fissiamo per le a un sistema di valori particolari

$$a_1^{(0)},\ a_2^{(0)} \ldots\ldots a_r^{(0)}$$

tali soltanto che per essi il determinante delle $\psi_{ik}(a^{(0)})$ e quindi quello delle $\alpha_{ik}(a^{(0)})$ non sia nullo - Fissati poi per le λ valori costanti qualunque si determinino le a in funzione di t, secondo le (c), dalle equazioni differenziali:

$$(32) \quad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \lambda_s \alpha_{sk}(a)$$

colle condizioni iniziali

$$a_k = a_k^{(0)} \quad \text{per} \quad t=0$$

La trasformazione S_a corrispondente al variare di t percorrerà altrettante trasformazioni della serie (20) nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ - È anzi facile vedere che, facendo poi variare le λ, la S_a percorrerà tutte le trasformazioni nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ - È invero per la forma delle (32) è evidente che gli integrali a dipenderanno dalle variabili

$$u_1 = \lambda_1 t,\quad u_2 = \lambda_2 t, \ldots\ldots u_r = \lambda_r t\,;$$

e poichè il determinante funzionale delle a rapporto alle u si riduce per $t=0$ appunto ad $|\alpha_{ik}(a^0)| \neq 0$, segue che possiamo inversamente esprimere le $u_1, u_2 \ldots u_r$ per $a_1, a_2 \ldots a_r$, cosicchè prendendo convenientemente le λ e t i parametri a riceveranno valori arbitrari -

Ora se, come sopra, teniamo fisse le λ e facciamo variare t, la S_a percorrerà una serie ∞' di trasformazioni entro la serie completa

$$x'_i = f_i(x, a)$$

tale che le x'_i, considerate come funzioni di t, soddisferanno a causa delle equazioni fondamentali (A) e delle (32) le equazioni differenziali

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_s^{1 \dots r} \xi_{si}(x') \sum_k^{1 \dots r} \psi_{sk}(a) \sum_j^{1 \dots r} \lambda_j \alpha_{jk}(a)$$

ossia

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_j^{1 \dots r} \lambda_j \xi_{ji}(x')$$

Secondo il risultato ottenuto pei gruppi ad un parametro alla fine del § 9, la trasformazione S_a nasce quindi eseguendo prima la trasformazione fissa $S_{a^{(0)}}$ poi una trasformazione finita del gruppo G_1 contenente l'identità generato dalla trasformazione infinitesima $\sum_j \lambda_j X_j f$, e ciò è appunto quello che volevamo provare.

Possiamo enunciare dunque il teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

soddisfa ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A) ed $S_{a^{(0)}}$ è una sua particolare trasformazione per la quale il determinante delle $\psi_{ik}(a^0)$ non è nullo, ogni trasformazione S_a della serie nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ si ottiene facendo seguire alla $S_{a^{(0)}}$ una trasformazione del gruppo ad un parametro G_1 generato da una trasformazione infinitesima $\sum^{1 \dots r} \lambda_j X_j f$, combinazione lineare a coefficienti costanti delle r trasformazioni indi-

pendenti

$$X_j f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Viceversa, comunque si prendano le λ, la composizione delle $S_{(a)}$ con una trasformazione finita del gruppo $\sum_j \lambda_j X_j f$ dà luogo ad una trasformazione della serie stessa —

Capitolo II°

I tre teoremi fondamentali della teoria dei gruppi. I gruppi misti —

§. 17

Il primo teorema fondamentale

L'intera teoria dei gruppi continui è stata fondata da Lie sopra tre successivi teoremi, di cui andiamo ora ad occuparci —

Il primo di essi, al quale già altrove abbiamo accennato, dà in certo modo l'inversione del teorema finale al §7, stabilendo che le equazioni differenziali del tipo (A), insieme ad alcune condizioni secondarie, sono caratteristiche per le serie costituenti un gruppo —

Per le serie ad un parametro abbiamo già stabilito il teorema in discorso ed ora vogliamo estenderlo al caso

di una serie ad r parametri

$$(1)\quad x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r),$$

che supponiamo soddisfare ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A)

$$(A)\quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\psi_{sk}(a)$$

$$i = 1, 2, \dots n \; ; \; k = 1, 2 \dots r .$$

Basta per ciò applicare i risultati conseguiti nel § precedente – Cominciamo dal supporre che la serie (1) contenga la trasformazione identica, la quale corrisponda ai valori $a_i = a_i^{(0)}$ dei parametri, e supponiamo inoltre che per questi valori dei parametri che danno $S_{a^{(0)}} = 1$ risulti diverso da zero il determinante delle ψ. Applicando il teorema alla fine del § 16 prendendo per S_a la $S_{a^{(0)}} = 1$, vediamo intanto che la serie (1), almeno in un certo intorno dell'identità, non è altro che l'insieme di tutte le trasformazioni degli ∞^{r-1} gruppi G_1 generati dalle trasformazioni infinitesime

$$\sum_i \lambda_i X_i f$$

Se poi applichiamo un'altra volta il teorema prendendo per S_a una trasformazione nell'intorno di $S_{a^{(0)}} = 1$, e con S_b indichiamo una trasformazione di uno dei gruppi G_1, che è pure una trasformazione qualunque della serie (1), risulterà

$$S_a S_b = S_c ,$$

dove S_c è una nuova trasformazione della serie – Così è appunto dimostrato che, sotto le condizioni supposte, la serie (1) costituisce un gruppo ed anzi un gruppo a coppie di tra-

sformazioni inverse, poichè tale proprietà appartiene pel § 9 ai gruppi G_1 che compongono il nostro gruppo a r parametri.

Riassumendo i risultati ora ottenuti con quelli diretti stabiliti al § 7, possiamo dare al primo teorema fondamentale l'enunciato seguente:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\,;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2, \ldots \ldots n$$

forma un gruppo, le x'_i, considerate come funzioni delle a, soddisfano un sistema di equazioni differenziali della forma

$$(A)\qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x')\, \psi_{sk}(a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots n \\ k = 1, 2 \ldots r \end{cases}$$

dove il determinante delle $\psi_{sk}(a)$ non è identicamente nullo, e le $\xi_{si}(x')$ sono tali funzioni delle x' che le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x')\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sono linearmente indipendenti.

Viceversa, se una serie ∞^r di trasformazioni soddisfa ad un sistema di equazioni del tipo A e contiene la trasformazione identica come corrispondente ai valori $a^{(0)}$ dei parametri e di più il determinante $|\psi_{sk}(a^0)|$ non è nullo, la serie stessa è un gruppo a coppie di trasformazioni inverse e coincide colla totalità delle trasformazioni contenute nei gruppi ad un parametro G_1 generati dalle ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime $\sum_i \lambda_i X_i f$.

Nell'ipotesi dell'ultima parte del teorema il gruppo (a coppie di trasformazioni inverse) si indicherà con G_r e si dirà generato dalle r trasformazioni infinitesime

$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_r f$

§ 18
Casi ulteriori

Per potere applicare il teorema superiore nella sua seconda parte bisogna che il determinante

$$|\psi_{ik}(a^0)|$$

pei valori $a^{(0)}$ dei parametri che danno l'identità sia diverso da zero. Ma supponiamo ora soltanto che la serie ∞^r di trasformazioni (1) soddisfi ad un sistema (A), e sia $S_{\bar{a}}$ una particolare trasformazione della serie tale che

$$|\psi_{ik}(\bar{a})| \neq 0 .$$

La serie

$$S_{\bar{a}}^{-1} S_a$$

contiene ∞^r trasformazioni e per $a_i = \bar{a}_i$ dà l'identità. D'altronde le formole effettive per la serie $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ essendo

$$x_i' = f_i(F_1(x, \bar{a}), F_2(x, \bar{a}) \ldots\ldots F_n(x, \bar{a}); a_1, a_2 \ldots a_r),$$

queste nuove funzioni x_i' soddisfano ancora il sistema (A) perchè dalle funzioni primitive differiscono solo per avervi cambiato le x_i in $F_i(x, \bar{a})$.

Dunque a questa serie $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ è applicabile il teorema fondamentale, onde abbiamo il risultato:

Se una serie ∞^r di trasformazioni (1) soddisfa ad un sistema (A) e la $S_{\bar{a}}$ è una tale trasformazione che il determinante $|\psi_{ik}(\bar{a})|$ non sia nullo, le ∞^r trasformazioni $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$, va-

riando le $\underline{a}$, costituiscono un gruppo G_r, generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1,2,\dots r)$$

Se supponiamo ora che la serie ∞^r di trasformazioni (1) costituisca un gruppo, ne segue di per sé che esse soddisfano ad un sistema di equazioni del tipo (A) e presa nel gruppo una trasformazione fissa $S_{\bar a}$ tale che $|\psi_{ik}(\bar a)| \neq 0$, le ∞^r trasformazioni $S_{\bar a}^{-1} S_a$ costituiranno un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse generato dalle trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f, \dots X_r f$ – Ora se nel gruppo oltre la $S_{\bar a}$ figura l'inversa $S_{\bar a}^{-1}$ la detta serie $S_{\bar a}^{-1} S_a$ coincide col gruppo stesso – Si ha quindi l'importante teorema:

Ogni gruppo a r parametri, le cui trasformazioni siano due a due inverse (*), è un gruppo G_r generato da r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f, \dots\dots X_r f,$$

le cui espressioni si ottengono nel noto modo stabilendo il sistema di equazioni differenziali (A) cui soddisfano le trasformazioni del gruppo –

(*) Per quanto si è visto, basta che insieme ad una certa trasformazione $S_{\bar a}$ esista nel gruppo l'inversa $S_{\bar a}^{-1}$, purchè sia diverso da zero il determinante $|\psi_{ik}(\bar a)|$, e il teorema del testo risulta applicabile

I gruppi G_r a coppie di trasformazioni inverse sono quelli che quasi esclusivamente si presentano e la semplicità della loro teoria consiste principalmente in ciò che il loro studio può farsi sulle r trasformazioni infinitesime che li generano. È di questi gruppi soltanto che intendiamo sempre di parlare in seguito, ove non si avverta esplicitamente il contrario.

§ . 19

Il sistema completo di equazioni a derivate parziali equivalente al sistema (A)

I gruppi sui quali si concentra tutto l'interesse dei nostri studi sono, come si è detto, i gruppi G_r generati da r trasformazioni infinitesimali

$$X_k f = \sum_i^{1 \dots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \dots r)$$

linearmente indipendenti.

Ora queste r trasformazioni

$$X_1 f,\ X_2 f, \dots X_r f,$$

per potere generare un gruppo, non possono essere prese ad arbitrio ma debbono soddisfare a certe speciali condizioni, chè altrimenti il complesso dei gruppi G_1 ad un parametro

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \dots + \lambda_r X_r f$$

formerebbe soltanto una serie ∞^r di trasformazioni senza il carattere di gruppo. Nella espressione di queste condi-

zioni come necessarie e sufficienti per la generazione di un gruppo G_r consiste il secondo teorema fondamentale, che Lie chiama il teorema principale (Hauptsatz) come il più importante dei tre. Cominciamo dal ricercare queste condizioni come necessarie. Supposto che la serie (1) costituisca un gruppo G_r dovranno le $f_i(x, a)$, considerate come funzioni delle a, soddisfare ad un sistema di equazioni ai differenziali totali (A), che deve essere illimitatamente integrabile (§7). Le condizioni d'integrabilità del sistema (A), che ora andiamo a sviluppare, danno appunto le condizioni cercate.

Sappiamo che l'integrazione di un sistema di equazioni ai differenziali totali come il sistema (A) è perfettamente equivalente a quella di un sistema completo di equazioni lineari omogenee per un'unica funzione incognita delle variabili indipendenti e delle funzioni incognite primitive.

Nel caso nostro si tratta di una funzione incognita

$$F(x'_1, x'_2 \dots x'_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

delle $n+r$ variabili x', a che deve soddisfare alle r equazioni lineari omogenee

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_k} + \sum_i^{1\dots n} \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\psi_{sk}(a)\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0 \quad , (k=1,2,\dots r).$$

Perchè il sistema sia illimitatamente integrabile, è necessario e sufficiente che il sistema (2) sia completo. Ora per il calcolo delle condizioni d'integrabilità è più utile scrivere le (2) sotto la forma seguente. Nel determinante non nullo delle ψ indichiamo, come al solito, con $\alpha_{jk}(a)$ il complemento algebrico

di φ_{jk} diviso per φ stesso - Moltiplicando la (2) per α_{jk} e sommando rispetto a k da 1 ad r, indi dando a j i suoi r valori $1, 2, \ldots r$ sostituiamo alle (2) il sistema equivalente:

$$(2^*) \qquad \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k} + \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots r$$

Delle due somme che costituiscono il primo membro la seconda, i cui coefficienti contengono solo le x', non è altro che l'espressione $X_j(F)$, ove alle x si sostituiscano le x', che indicheremo perciò con

$$X'_j f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i}$$

Anche i coefficienti della prima somma dipendono dalle sole variabili a rispetto alle quali sono prese le derivate di F.

Introducendo il simbolo

$$(3) \qquad A_j F = \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k},$$

il sistema completo (2) la cui integrazione equivale a quella delle equazioni differenziali fondamentali (A), si scrive

$$(C) \qquad A_j F + X'_j F = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots r)$$

§ 20

Condizioni d'integrabilità

Affinchè il sistema (C) sia completo debbono tutte le operazioni alternate

$$(A_j + X'_j,\ A_k + X'_k) \qquad j, k = 1, 2, \ldots r$$

comporsi linearmente coi primi membri delle (C) stesse. Se si osserva che nelle A non entrano le $\underline{x}'$ e nelle X non entrano le $\underline{a}$, queste condizioni si scrivono:

$$(4)\qquad (A_j, A_k)+(X_j', X_k') = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\,(A_sF + X_s'F)$$

dove le ϑ_{jks} indicano convenienti funzioni delle x' e delle $\underline{a}$, che per altro, come ora si vedrà, si riducono a costanti.

Intanto, dovendo le (4) sussistere per una funzione qualunque F delle x' e quindi anche per una funzione qualsiasi delle sole a o delle sole x', avremo separatamente

$$(5)\qquad (A_j, A_k) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\, A_sF$$

$$(6)\qquad (X_j', X_k') = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\, X_s'F$$

Paragonando nelle (5) i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial a_i}$ da una parte e dall'altra abbiamo

$$A_j(\alpha_{ki}) - A_k(\alpha_{ji}) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\, \alpha_{si}$$

$$i = 1, 2, \dots r$$

Queste possono considerarsi come $\underline{r}$ equazioni lineari nelle

$$\vartheta_{jk1},\ \vartheta_{jk2}, \dots\dots \vartheta_{jkr}$$

e poichè il determinante delle $\underline{\alpha}$ non è zero, possono risolversi rispetto alle ϑ_{jks} $(s=1,2,\dots r)$. Segue dunque intanto che le ϑ_{jks} non contengono le x'. Similmente se nelle (6) paragoniamo i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial x_i'}$ da una parte e dal-

l'altra, abbiamo:

$$X_j'(\xi_{ki}) - X_k'(\xi_{ji}) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\, \xi_{si}(x'),$$

onde derivando rispetto ad una qualunque a:

$$\sum_s^{1\dots r} \frac{\partial \vartheta_{jks}}{\partial a_\lambda} X_s'F = 0\,;$$

dunque le derivate $\frac{\partial \vartheta_{jks}}{\partial a_\lambda}$ debbono essere tutte nulle, giacchè le

$$X_1'F,\ X_2'F, \dots\dots X_r'F$$

sono linearmente indipendenti. Se ne conclude che le ϑ_{jks} non contenendo nè le x' nè le a sono costanti numeriche, queste indichiamo con c_{jks}.

Dunque: Le condizioni d'illimitata integrabilità delle equazioni fondamentali (A) si scrivono

$$(\alpha)\quad (X_j', X_k') = \sum_s^{1\dots r} c_{jks} X_s'F$$

$$(\beta)\quad (A_j, A_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{jks} A_sF,$$

essendo le c_{jks} costanti numeriche.

§. 21

Le condizioni (α), (β) come sufficienti

Supponiamo ora inversamente che le r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti nelle $x_1', x_2' \dots x_n'$

$$X_j'F = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x_i'}$$

soddisfino le (α) e le r trasformazioni infinitesime nelle

a, pure linearmente indipendenti

$$A_j F = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k}$$

soddisfino le (β). Allora il sistema (C) è completo, ed il sistema equivalente (2), essendo risoluto rispetto alle derivate

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}, \frac{\partial F}{\partial a_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial a_r}$$

è Jacobiano di forma normale - Fissato un sistema particolare di valori delle a

$$a_1^{(0)} \quad a_2^{(0)} \dots a_r^{(0)}$$

tale soltanto che il determinante

$$|\psi_{ik}(a^{(0)})|$$

non sia nullo, consideriamo le soluzioni principali

$$F_1, F_2 \dots F_n$$

del sistema (2) che per $a_1 = a_1^{(0)}, \dots a_r = a_r^{(0)}$ si riducono rispettivamente a

$$x_1', x_2' \dots x_n'$$

Se risolviamo il sistema di equazioni

$$F_i(x_1', x_2' \dots x_n'; a_1 \, a_2 \dots a_r) = x_i$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

rispetto alle x' ed otteniamo

$$(7) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots x_n; a_1 \, a_2 \dots a_r)$$

queste funzioni $f_i(x, a)$ soddisfano, come sappiamo, al sistema (A) di equazioni ai differenziali totali. Poichè inoltre la serie ∞^r di trasformazioni contiene l'identità che corrisponde ai valori $a^{(0)}$ delle a, ed è $|\psi_{ik}(a^{(0)})| \neq 0$, basta invocare la seconda parte del primo teorema fondamentale (§ 17) per vedere che le (7) definiscono un gruppo G_r, ge-

nerato dalle r trasformazioni infinitesime $X_1f, X_2f \dots X_rf$

§ . 22

Nuova dimostrazione del primo teorema fondamentale

Invece di ricorrere, come ultimamente abbiamo fatto, alla seconda parte del primo teorema fondamentale, possiamo anzi dedurre dalle considerazioni del § precedente una nuova dimostrazione di questo teorema, dovuta a Schur.

Supponiamo infatti 1° che la serie ∞^r di trasformazioni

(a) $$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

soddisfi ad un sistema di equazioni differenziali della forma

(b) $$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\psi_{sk}(a)$$

2° che nella (a) sia contenuta l'identità, per $a = a^{(0)}$ e il determinante $|\psi_{sk}(a^0)|$ non sia nullo.

Allora siccome le (b) formano un sistema illimitatamente integrabile, le trasformazioni infinitesime

$$X_jf \ , \quad A_jf$$

soddisferanno necessariamente le (α), (β). Ora cerchiamo di determinare r funzioni incognite $c_1, c_2 \dots c_r$ di r variabili $b_1, b_2 \dots b_r$ dal sistema di equazioni ai differenziali totali

(c) $$\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \sum_s^{1\dots r} \alpha_{s\lambda}(c_1\, c_2 \dots c_r)\psi_{sk}(b_1\, b_2 \dots b_r)$$

$$\lambda, k = 1, 2, \ldots r$$

Questo sistema (c) è illimitatamente integrabile; perchè il corrispondente sistema di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali per una funzione incognita $\Phi(b_1 b_2 \ldots b_r; c_1 \ldots c_r)$ si scrive

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \sum_{\lambda, s}^{1 \ldots r} \alpha_{s\lambda}(c) \psi_{sk}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots r;$$

moltiplicando la precedente per $\alpha_{ik}(b)$ e sommando da $k=1$ a $k=r$ si ha il sistema equivalente

$$\sum_k^{1 \ldots r} \alpha_{ik}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \sum_\lambda^{1 \ldots r} \alpha_{i\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

Ora questo è un sistema completo a causa delle (β).

Ciò posto, integriamo le (c) sotto le condizioni iniziali

$$c_i = a_i \text{ per } b_k = a_k^{(0)}$$

e siano

$$(d) \qquad c_i = \theta_i(a_1, a_2 \ldots a_r;\; b_1 b_2 \ldots b_r)$$

gli integrali corrispondenti.

Se poniamo

$$(e) \qquad x_i'' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n; c_1 c_2 \ldots c_r)$$

avremo per le (b)

$$\frac{\partial x_i''}{\partial c_\lambda} = \sum_s^{1 \ldots r} \xi_{si}(x'') \psi_{s\lambda}(c);$$

quindi sostituendo per le c nelle (e) i valori (d) e avendo riguardo alle (c), troviamo

$$\frac{\partial x_i''}{\partial b_k} = \sum_\lambda \frac{\partial x_i''}{\partial c_\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \sum_{\lambda s t} \xi_{si}(x'') \psi_{s\lambda}(c) \alpha_{t\lambda}(c) \psi_{tk}(b)$$

Ma

$$\sum_{\lambda} \psi_{s\lambda}(c)\,\alpha_{t\lambda}(c) = \varepsilon_{st} = \begin{cases} 0 & \text{per } s \neq t \\ 1 & \text{"} \; s = t \end{cases} \;;$$

dunque

$$\frac{\partial x_i''}{\partial b_k} = \sum_{s}^{1\ldots r} \xi_{si}(x'')\,\psi_{sk}(b)$$

Queste sono per le x_i'', considerate come funzioni delle b, precisamente come le equazioni (b) e poichè per $b_k = a_k^{(0)}$ si riducono per le (e) a

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1\, a_2 \ldots a_r) = x_i'$$

ne risulta (pel teorema d'unicità):

$$x_i'' = f_i(x';\, b)$$

Sono dunque soddisfatte le equazioni funzionali

$$f_i(f_1(x,a), f_2(x,a) \ldots f_n(x,a);\, b_1\, b_2 \ldots b_r) = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, c_1\, c_2 \ldots c_r)$$

caratteristiche di un gruppo.

Si osserverà che in questa dimostrazione di Schur del primo teorema fondamentale le formole che legano i parametri c della trasformazione composta $S_c = S_a S_b$ a quelli a, b delle componenti si ottengono integrando le equazioni ai differenziali totali (c), senza che sia necessario conoscere le equazioni finite (a) del gruppo. Su questo ritorneremo più tardi, trattando dei così detti gruppi parametrici.

§. 23

Il secondo teorema fondamentale
(Teorema principale)

Affinchè le trasformazioni infinitesime

$$X_1 f \,,\, X_2 f \,\ldots\ldots\, X_r f$$

linearmente indipendenti generino un gruppo G_r è necessario e sufficiente, come si è visto alla fine del §. 21, che siano soddisfatte le condizioni (α) e (β) - Ma poichè il gruppo è già perfettamente determinato, ove esista, dalle espressioni delle sole X, è naturale domandarsi se non bastino già le prime condizioni (α)

$$(\alpha) \qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

per assicurarne l'esistenza, per dedurne cioè che gli ∞^{r-1} gruppi G_1 generati dalle combinazioni lineari a coefficienti costanti delle X

$$\sum_k^{1\ldots r} \lambda_k X_k f$$

costituiscono un gruppo G_r - La risposta alla domanda è affermativa e per dimostrarlo basterà stabilire, secondo il § 21, che se le r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

soddisfano le (α), si possono sempre trovare altre r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti

$$A_i f = \sum_k^{1 \dots r} \alpha_{ik}(a_1\, a_2 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k}$$

$$i = 1, 2, \dots r$$

in r variabili indipendenti $a_1\ a_2 \dots a_r$ tali che sussistano anche le

$$(\beta) \qquad (A_i, A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f.$$

Per trovare le suddette $A_i f$ si può procedere, secondo Lie, nel modo seguente.

Scriviamo r volte le espressioni X in r sistemi di variabili indipendenti

$$(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \dots \dots x_n^{(1)})$$
$$(x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \dots \dots x_n^{(2)})$$
$$\text{- - - - - - - - - -}$$
$$(x_1^{(r)}\ x_2^{(r)} \dots \dots x_n^{(r)}),$$

ponendo

$$X_i^{(\lambda)} \Phi = \sum_k^{1 \dots n} \xi_{ik}(x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)} \dots x_n^{(\lambda)}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k^{(\lambda)}}$$

$$i, \lambda = 1, 2, \dots r,$$

e poniamo

$$(8) \qquad W_i \Phi = X_i^{(1)} \Phi + X_i^{(2)} \Phi + \dots + X_i^{(r)} \Phi,$$

essendo Φ una funzione qualunque delle rn variabili $x_k^{(\lambda)}$. Prima di tutto è facile dimostrare che il sistema delle r equazioni lineari omogenee nelle derivate parziali della Φ

$$(9) \quad W_1 \Phi = 0\ , \ W_2 \Phi = 0\ , \dots \dots W_r \Phi = 0$$

è costituito di equazioni tutte indipendenti; che cioè non

può sussistere un'identità della forma

$$\chi_1 W_1 \Phi + \chi_2 W_2 \Phi + \ldots\ldots + \chi_r W_r \Phi = 0$$

essendo le χ convenienti funzioni delle rn variabili $x_i^{(\lambda)}$ -

Una tale identità trarrebbe infatti con sè le rn identità

$$(10) \qquad \chi_1 \xi_{1k}(x^{(\lambda)}) + \chi_2 \xi_{2k}(x^{(\lambda)}) + \ldots\ldots + \chi_r \xi_{rk}(x^{(\lambda)}) = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots n \; ; \quad \lambda = 1, 2, \ldots r,$$

e se le supponiamo compatibili, nel primo gruppo di n equazioni ottenute facendo $\lambda = 1$, vi debbono essere solo $\nu_1 < r$ equazioni indipendenti. Le n equazioni seguenti ottenute facendo $\lambda = 2$ non possono essere tutte conseguenze delle precedenti, altrimenti potremmo soddisfare le n equazioni

$$\sum_i \chi_i \, \xi_{ik}(x_1^{(2)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)}) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots n.$$

con valori delle χ indipendenti dalle $x^{(2)}$ (funzioni solo delle $x^{(1)}$) e quindi le r espressioni

$$X_1^{(2)}\Phi \, , \; X_2^{(2)}\Phi , \ldots\ldots X_r^{(2)}\Phi$$

non sarebbero indipendenti. Dunque il numero ν_2 delle equazioni del secondo gruppo $(\lambda = 2)$ indipendenti fra loro e dalle precedenti è certo > 1 - Nello stesso modo si vede che in ciascuno degli r gruppi si trova almeno un'equazione indipendente dalle precedenti; si arriva così ad r equazioni indipendenti onde si deduce che debbono annullarsi tutte le χ -

Ora il sistema di r equazioni ~~...~~ (9) è un sistema completo, perchè avendosi in generale

$$\left(X_i^{(\lambda)}, X_k^{(\lambda)}\right) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s^{(\lambda)} \Phi ,$$

si ha anche evidentemente

$$(W_i, W_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} W_s \Phi ;$$

esso ammette dunque $rn - r$ soluzioni indipendenti, siano

$$u_1, u_2 \dots\dots u_{rn-r}$$

Facciamo un cambiamento delle variabili indipendenti

(*) La proprietà qui dimostrata equivale alla seguente - Si considerino le matrici

$$M_1 \equiv \left|\xi_{ik}(x^{(1)})\right| , M_2 \equiv \left|\xi_{ik}(x^{(1)}), \xi_{ik}(x^{(2)})\right|, \dots\dots\dots$$

$$M_s \equiv \left|\xi_{ik}(x^{(1)}), \xi_{ik}(x^{(2)}) \dots \xi_{ik}(x^{(s)})\right| \dots\dots$$

e siano $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_s \dots$ le loro caratteristiche; finchè $\nu_s < r$ sarà $\nu_{s+1} > \nu_s$, onde certamente $\nu_r = r$. Ciò si dimostra anche facilmente in modo diretto così - Se $\nu_s < r$ si estragga da M_s un minore d'ordine ν_s diverso da zero e se ne faccia un minore d'ordine $\nu_s + 1$ in M_{s+1} aggiungendovi una colonna formata colle $\xi_{ik}(x^{(s+1)})$ ed una linea ad arbitrio - Se fosse $\nu_{s+1} = \nu_s$, questo minore d'ordine $\nu_s + 1$ sarebbe nullo; ciò legherebbe necessariamente le $x^{(s+1)}$ alle precedenti $x^{(1)} \dots x^{(s)}$, poichè quelle $\xi_{ik}(x^{(s+1)})$ non possono annullarsi identicamente, altrimenti sarebbe stato nullo anche il minore d'ordine ν_s prima estratto da M_s, contro l'ipotesi.

$x_k^{(\lambda)}$ prendendo per nuove variabili le

$$u_1\ u_2 \dots u_{2n-r}$$

insieme ad r nuove funzioni indipendenti fra loro e dalle u che indicheremo con

$$a_1\ a_2 \dots a_r$$

Se trasformiamo le W_i nelle nuove variabili e indichiamo le operazioni trasformate con $\overline{W}_i\Phi$, siccome le u sono soluzioni delle (9) avremo

$$\overline{W}_i\Phi = W_i(a_1)\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} + W_i(a_2)\frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + \dots + W_i(a_r)\frac{\partial\Phi}{\partial a_r} -$$

Le r nuove $\overline{W}_i\Phi$ sono ancora linearmente indipendenti e soddisfano le relazioni

$$(\overline{W}_i, \overline{W}_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks}\overline{W}_s\Phi$$

Ma poichè nelle $\overline{W}_i$ non figurano le derivate delle Φ rapporto alle u, è chiaro che le proprietà ora osservate sussistono ancora se per $u_1, u_2 \dots u_{2n-r}$ poniamo delle costanti arbitrarie - Chiamando allora

$$A_i\Phi = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{ik}(a_1\ a_2 \dots a_r)\frac{\partial\Phi}{\partial a_k}$$

le espressioni che così otteniamo dalle $\overline{W}_i$, avremo evidentemente costruito le espressioni $A_i\Phi$ domandate.

Abbiamo così dimostrato in tutte le sue parti il Secondo teorema fondamentale che si enuncia:

Ogni gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse è generato da r trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots n} \xi_{ik}(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} ;$$

che soddisfano a relazioni della forma

$$(\alpha) \qquad (X_i , X_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{ijs} X_s f$$

$$i, j = 1, 2, \ldots r$$

essendo le c_{ijs} costanti numeriche.

Viceversa, se le r trasformazioni infinitesime indipendenti $X_i f$ soddisfano relazioni della forma (α), esse generano un tale gruppo G_r, il quale è l'insieme di tutti i gruppi G_1 a un parametro generati dalle trasformazioni infinitesime $\sum_k^r \lambda_k X_k f$.

§. 24
Le relazioni fra le costanti c_{iks}

Nelle relazioni (α) che legano le r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, X_2 f, \ldots X_r f$$

generatrici di un gruppo G_r, le quantità c_{ijs} sono r^3 costanti numeriche. Ora è assai importante osservare che queste r^3 costanti non sono indipendenti, bensì legate da certe relazioni che ora andiamo a stabilire.

In primo luogo avendosi identicamente

$$(X_i , X_k) + (X_k , X_i) = 0$$

ne risulta

$$\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) X_s f = 0 ;$$

e poichè $X f$ sono linearmente indipendenti segue intanto

$$c_{iks} + c_{kis} = 0$$

Queste sono le prime relazioni cercate.

In secondo luogo se i, k, j sono tre indici qualunque sussiste l'identità di Jacobi

$$(11) \quad ((X_i, X_k), X_j) + ((X_k, X_j), X_i) + ((X_j, X_i), X_k) = 0,$$

che si dimostra subito nel modo seguente.

Si ha

$$((X_i, X_k), X_j) = X_i X_k X_j f - X_k X_i X_j f - X_j X_i X_k f + X_j X_k X_i f,$$

e siccome il terzo termine deriva dal primo per scambio circolare degli indici $i\,k\,j$ e medesimamente il quarto dal secondo così è chiaro che, applicando due volte la permutazione ciclica $(i\,k\,j)$ e sommando i risultati, si ottiene l'identità Jacobiana (11).

Ora in questa identità (11) poniamo per le espressioni alternate (X_i, X_k) le loro espressioni in funzione lineare delle X date dalle (α). Troviamo dapprima

$$((X_i, X_k), X_j) = (\sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f, X_j f) =$$

$$= \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} (X_s, X_j) = \sum_s^{1\ldots r} \sum_\lambda^{1\ldots r} c_{iks}\, c_{sj\lambda} X_\lambda f,$$

e per ciò la (11) diventa

$$\sum_\lambda^{1\ldots r} \Big[\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) \Big] X_\lambda f = 0$$

Essendo le $X f$ indipendenti, segue che le c debbono soddisfare le equazioni

$$\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) = 0$$

per tutti i valori da 1 a r degli indici i, k, j, λ.

Abbiamo quindi l'importante risultato:

Le costanti c_{iks} delle relazioni

$$(X_i, X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

che legano le r trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$ generatrici di un gruppo G_r soddisfano, per tutti i valori degli indici da 1 a r, alle equazioni seguenti

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_s^{1\dots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) = 0 \end{array} \right.$$

Si osservi che queste relazioni sono indipendenti affatto dal numero delle variabili su cui opera il gruppo.

Le r^3 costanti c_{iks} hanno la massima importanza per la natura del gruppo e diconsi, per una ragione che apparirà dagli studi ulteriori, le costanti di composizione o struttura del gruppo.

Affinchè le r^3 costanti c_{iks} appartengano, come costanti di composizione, ad un gruppo G_r è dunque necessario che soddisfino le (I). Ma tali condizioni, come andiamo ora a dimostrare, sono altresì sufficienti; in questa proprietà consiste il 3° teorema fondamentale della teoria.

§ 25

Proprietà del simbolo (UV)

Per dimostrare che le relazioni (I) fra le costanti c_{iks}

sono sufficienti perchè esista un gruppo G_r che ammetta le c_{iks} come costanti di composizione, basterà costruire, in un conveniente numero n di variabili, r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_r f$$

tali che risulti

$$(X_i, X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$

Consideriamo dapprima r variabili indipendenti

$$y_1, y_2 \,---\, y_r$$

ed essendo U, V due funzioni qualunque delle y, studiamo l'espressione bilineare nelle derivate delle U, V data da

$$\sum_s^{1\ldots r} \sum_{i,k}^{1\ldots r} c_{iks}\, y_s \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_k}$$

che indichiamo col simbolo $|UV|$

(12) $$|U,V| = \sum_{s,i,k}^{1\ldots r} c_{iks}\, y_s \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_k}$$

Notiamo che avendosi

$$|U, y_k| = \sum_{is} c_{iks}\, y_s \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

possiamo scrivere la (12) anche così

(12*) $$|U,V| = \sum_k |U, y_k| \frac{\partial V}{\partial y_k}.$$

Ora per le prime relazioni (I) cui soddisfano le c_{iks} si vede subito che il simbolo $|U,V|$ possiede la prima proprietà delle espressioni alternate espressa dalla formola

(13) $$|U,V| + |V,U| = 0$$

In secondo luogo diciamo che se U, V, W sono tre fun-

zioni qualunque delle y sussiste altresì l'identità analoga a quella di Jacobi (11)

$$(14)\qquad [[U,V],W]+[[V,W],U]+[[W,U],V]=0$$

Per questo incominciamo dal dimostrare che se la (14) vale per due dati U, V con $W=y_i$, varrà pure colle medesime U, V e W qualunque. E infatti si ha per la (12*)

$$[U,W]=\sum_i [U,y_i]\frac{\partial W}{\partial y_i}=AW$$

$$[V,W]=\sum_i [V,y_i]\frac{\partial W}{\partial y_i}=BW$$

indicando con AW, BW le relative operazioni del 1° ordine eseguite su W, e quindi

$$[U,[V,W]]-[V,[U,W]]=A(BW)-B(AW)=$$

$$=\sum_i\{A([V,y_i])-B([U,y_i])\}\frac{\partial W}{\partial y_i}$$

$$=\sum_i\{[U,[V,y_i]]-[V,[U,y_i]]\}\frac{\partial W}{\partial y_i}$$

Ma sussistendo per ipotesi la (14) per $W=y_i$ si ha

$$[U,[V,y_i]]-[V,[U,y_i]]=[[U,V],y_i]$$

e quindi la precedente diviene

$$[U,[V,W]]-[V,[U,W]]=\sum_i[[U,V],y_i]\frac{\partial W}{\partial y_i}=[[U,V],W],$$

che è precisamente la (14) —

Basta ora osservare che facendo

$$U=y_i \qquad V=y_k, \qquad W=y_j$$

la (14) sussiste perchè si ha

$$(y_i\, y_k) = \sum_s c_{iks}\, y_s$$

e quindi

$$((y_i\, y_k)\, y_j) = \sum_s c_{iks}\, (y_s\, y_j) = \sum_s c_{iks} \sum_\lambda c_{sj\lambda}\, y_\lambda\ ;$$

l'identità da verificarsi segue dunque dalle relazioni quadratiche (I) cui soddisfano le c_{iks} -

Ciò posto, siccome la (14) vale per

$$U = y_i\ ,\quad V = y_k\ ,\quad W = y_j\ ,$$

essa vale anche per

$$U = y_i \quad V = y_k\ ,\quad W \text{ qualunque},$$

indi per

$$U = y_i\ ,\quad V \text{ qualunque},\quad W \text{ qualunque}$$

e in fine per U, V, W qualunque e. d. d.

Se poniamo

$$A_i f = (y_i\, f) \quad (i = 1, 2, \dots r),$$

per l'identità (14) avremo:

$$(A_i\, A_k) = ((y_i\, y_k)\, f) = \sum_s c_{iks}\, (y_s\, f)$$

cioè

$$(A_i\, A_k) = \sum_s c_{iks}\, A_s f$$

Le r trasformazioni infinitesimali

$$A_1 f,\ A_2 f, \dots A_r f$$

nelle r variabili $y_1, y_2, \dots y_r$ soddisfano dunque alle relazioni di composizione richieste

$$(A_i\, A_k) = \sum_s c_{iks}\, A_s f$$

Se esse risultano dunque linearmente indipendenti, lo scopo è già raggiunto - .

Ma che così sempre non accada, lo dimostra l'esempio semplice in cui tutte le c_{iks} siano nulle; allora tutte le $A_i f$ si annullano identicamente.

§. 26
Cangiamento di variabili

Per ottenere in tutti i casi le r trasformazioni richieste linearmente indipendenti giova innanzi tutto eseguire un tale cangiamento di variabili indipendenti, dalle $y_1, y_2 \ldots y_r$ nelle $Y_1, Y_2 \ldots Y_r$ che tutti i simboli $(Y_i Y_k)$ abbiano il valore zero od uno, ciò che si ottiene nel modo seguente.

In primo luogo, se tutte le c_{iks} sono nulle, basta prendere $Y_i = y_i$ (cioè non cangiare le variabili) e lo scopo è già raggiunto (*). In caso contrario poniamo per es. che non tutte le c_{1ks} $(k, s = 1, 2 \ldots r)$ siano nulle e prendiamo una soluzione X_1 della equazione a derivate parziali

$$(y_1 f) = \sum_{k,s} c_{1ks}\, y_s \frac{\partial f}{\partial y_k} = 1$$

e ponendo $P_1 = y_1$ la coppia di funzioni P_1, X_1 soddisferà

(*) Del resto in questo caso basta prendere

$$A_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

e le r trasformazioni sono indipendenti ed hanno la composizione voluta. Esse generano il gruppo delle traslazioni

$$y_i' = y_i + a_i$$

alle condizione

$$|P_1 X_1| = 1$$

Consideriamo ora le due equazioni simultanee

1) (15) $\quad A_1 f = |P_1 f| = 0 \quad , \quad A_2 f = |X_1 f| = 0 \,,$

le quali sono certo indipendenti perchè $f = P_1$ soddisfa la prima e non la seconda. Esse formano inoltre un sistema completo perchè

$$(A_1, A_2) = |P_1, |X_1 f|| - |X_1, |P_1 f|| =$$

$$= ||P_1 X_1|, f| = |1, f| = 0 \;;$$

ammettono dunque $r-2$ soluzioni indipendenti

$$y_1' \; y_2' \cdots\cdots y_{r-2}'$$

Queste sono anche indipendenti da P_1, X_1 perchè supponendole legate da una relazione

$$\varphi(P_1, X_1, y_1', y_2' \cdots\cdots y_{r-2}') = 0$$

le operazioni A_1, A_2 eseguite nella φ darebbero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} = 0 \;, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = 0$$

Inoltre, applicando l'identità (14) col fare

$$U = y_i' \;, \quad V = y_k' \,, \quad W = \begin{cases} P_1 \\ X_1 \end{cases} ,$$

vediamo che $|y_i' y_k'|$ è altresì una soluzione del sistema (15) e quindi è una funzione di $y_1' \; y_2' \cdots\cdots y_{r-2}'$

soltanto. Così le r funzioni indipendenti

$$P_1 \,.\, X_1 \,,\, y'_1 \,.\, y'_2 \,---\, y'_{r-2}$$

soddisfano alle condizioni.

$$|P_1 X_1| = 1 \,,\, |P_1 y'_i| = 0 \,,\quad |X_1 y'_i| = 0$$

$$|y'_i y'_k| = \varphi_{ik}(y'_1\, y'_2 \,----\, y'_{r-2})$$

Se tutte le φ_{ik} fossero nulle avremmo già conseguito il richiesto cangiamento di variabili. In caso contrario procedendo sopra

$$y'_1 \; y'_2 \,---\, y'_{r-2}$$

come prima per $y_1\,,\,y_2 \,---\, y_r$ (*) troveremo $r-2$ funzioni indipendenti delle y'

$$P_2 \,.\, X_2 \,.\, y''_1 \;\; y''_2 \,---\, y''_{r-4}$$

tali che

$$|P_2 X_2| = 1 \,,\quad |P_2 y''_i| = 0 \quad ,\quad |X_2 y''_i| = 0$$

$$|y''_i y''_k| = \varphi'_{ik}(y''_1\; y''_2 \,---\, y''_{r-4})$$

Così procedendo, troveremo $r = 2m+q$ funzioni indipendenti di $y_1\, y_2 \cdots y_r$

(*) Se per es. non tutte le φ_{ik} sono nulle, posto

$$A'_1 f = |y'_1 f| = \sum_k \varphi_{1k} \frac{\partial f}{\partial y'_k}$$

si troverà una soluzione X_2 (funzione delle y') della equazione $\quad A'_1 f = 1$

e si farà $P_2 = y'_1$ ecc...

$$P_1, P_2 \dots P_{m+q} \text{ di } X_1, X_2 \dots X_m$$

tali che si avrà

$$(16) \quad |P_i P_k| = 0 \qquad |P_i X_k| = \varepsilon_{ik}$$

$$|X_i X_k| = 0$$

Assumendo come nuove variabili le P e le X si raggiunge lo scopo proposto.

§ 27

Il terzo teorema fondamentale

Esprimendo il simbolo $|U, V|$ nelle nuove variabili P, X avremo:

$$|UV| = \sum_{i,k}^{1,m+q} |P_i P_k| \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial P_k} \right) + \sum_{i,k}^{1\dots m} |X_i X_k| \frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{\partial V}{\partial X_k} +$$

$$+ \sum_i^{1\dots m+q} \sum_k^{1\dots m} |P_i X_k| \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial X_k} - \frac{\partial U}{\partial X_k} \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)$$

e quindi per le (16)

$$|UV| = \sum_i^{1\dots m} \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial X_i} - \frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)$$

Indicando con

$$y_i = \Omega_i (P, X)$$

le formole di trasformazione delle variabili, le r operazioni

$$A_k f = [y_k f] \qquad k = 1, 2 \dots r$$

costruite al § 25, espresse per le nuove variabili diventano

$$(17) \quad A_k f = \sum_i^{1\dots m} \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right)$$

Naturalmente anche nelle nuove variabili le $A_i f$ soddisfano alle relazioni

$$(A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f \ ;$$

però il numero delle linearmente indipendenti fra le $A_i f$ è rimasto ancora lo stesso e non abbiamo fino ad ora conseguito alcun vantaggio sulla trattazione primitiva. Per altro la forma delle (17) suggerisce un artifizio semplice per conseguire lo scopo - Alle $r = 2m+q$ variabili

$$P_1, P_2 \ldots\ldots P_{m+q} \ ; \ X_1, X_2 \ldots\ldots X_m$$

aggiungiamo q nuove variabili indipendenti

$$X_{m+1}, \ X_{m+2} \ldots\ldots X_{m+q}$$

e poniamo

$$(18) \qquad B_k f = \sum_i^{1\ldots m+q} \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right),$$

ossia, siccome le Ω non contengono $X_{m+1} \ldots\ldots X_{m+q}$

$$(18^*) \qquad B_k f = A_k f + \sum_\lambda^{1\ldots q} \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}} .$$

Dico che le r trasformazioni infinitesime

$$B_1 f, \ B_2 f \ldots\ldots B_r f$$

nelle $2m+2q$ variabili P, X soddisfano alle relazioni di composizione

$$(B_i B_k) = \sum_s c_{iks} B_s f$$

e sono linearmente indipendenti.

La prima cosa risulta osservando che dalla (18*), non comparendo $X_{m+1} \ldots X_{m+q}$ nei coefficienti delle A_k, si ha:

$$(B_i, B_k) = (A_i, A_k) + \sum_{\lambda}^{1\ldots r} \left\{ A_i\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}}\right) - A_k\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\lambda}}\right)\right\} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}}$$

Ma si trova subito dalle (17)

$$A_i\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}}\right) - A_k\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\lambda}}\right) = \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} \sum_{\nu}^{1\ldots m}\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\nu}\frac{\partial \Omega_k}{\partial X_\nu} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\nu}\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_\nu}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} (y_i y_k) = \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks}\, \Omega_s =$$

$$= \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks} \frac{\partial \Omega_s}{\partial P_{m+\lambda}}$$

e quindi

$$(B_i, B_k) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks} A_s f + \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks} \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \frac{\partial \Omega_s}{\partial P_{m+\lambda}} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}} = \sum_{s} c_{iks} B_s f$$

come si voleva.

Ammesso ora che fra le $B_i f$ sussistesse una relazione

$$\sum_{i}^{1\ldots r} e_i B_i f = 0$$

colle e costanti, facendo in questa successivamente

$$f = P_1, P_2 \ldots P_{m+q} \; ; \; X_1, X_2 \ldots X_{m+q}$$

ne verrebbe

$$\sum_i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\lambda} = 0 \quad ; \quad \sum_i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\lambda} = 0$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots m+q$$

e quindi

$$\sum_i e_i \Omega_i = \sum_i e_i y_i = \text{costante},$$

ciò che, essendo le y indipendenti, dà:

$$e_1 = e_2 = \ldots\ldots = e_r = 0 .$$

Così sono effettivamente costruite le r trasforma-

zioni richieste e possiamo in fine formulare il terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi, che si enuncia:

Se un gruppo G_r, in un numero qualunque n di variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, possiede l r trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum_k \xi_{ik}(x_1 x_2 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

le costanti c_{iks} delle relazioni di composizione

$$(X_i, X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

soddisfano alle relazioni

$$(I) \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_s^{1\dots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Viceversa se le r^3 costanti c_{iks} soddisfano le (I), si possono sempre trovare, in un numero conveniente di variabili, r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti per le quali le costanti di composizione abbiano i valori c_{iks} -

§ 28

Le equazioni di Maurer per le ψ_{ik}

I tre teoremi che abbiamo dimostrato nel presente capitolo sono di fondamentale importanza per la teoria dei gruppi, ed è utile conoscerne diverse dimostrazioni -

Già al § 22 abbiamo esposto una nuova dimostrazione del 1° teorema ed ora ci proponiamo di fare altrettanto per

gli altri due - Le nuove dimostrazioni sono dovute ancora a Schur e noi le esporremo colle modificazioni e semplificazioni apportatevi da Engel e da Lie stesso.

Dimostreremo perciò che se le r^3 costanti c_{iks} soddisfano le relazioni (I) si possono trovare in r variabili $a_1, a_2 \dots a_r$ r trasformazioni linearmente indipendenti

$$(19) \qquad A_i f = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{ik}(a_1, a_2 \dots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k}$$

che soddisfino alle relazioni di composizione

$$(20) \qquad (A_i A_j) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs} A_s f$$

Con ciò verrà dimostrato nuovamente il terzo teorema fondamentale ed insieme anche il secondo, come risulta subito dal § 21.

Si tratta dunque di trovare r^2 funzioni α_{ik} di $a_1\, a_2 \dots a_r$ il cui determinante sia $\neq 0$ (ciò che assicura l'indipendenza lineare delle (19)) e che soddisfino alle relazioni (20)

$$A_i(\alpha_{j\mu}) - A_j(\alpha_{i\mu}) = \sum_s c_{ijs}\, \alpha_{s\mu}\,.$$

ossia alle seguenti

$$(21) \qquad \sum_k^{1\dots r}\left(\alpha_{ik}\frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial a_k} - \alpha_{jk}\frac{\partial \alpha_{i\mu}}{\partial a_k}\right) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs}\, \alpha_{s\mu}$$

In armonia colle notazioni già usate al § 19, indichi ψ_{ik} il quoziente del complemento algebrico di α_{ik} nel determinante delle α pel determinante stesso. Le equazioni (21) possono cambiarsi in equazioni equivalenti per le ψ nel modo seguente -

Moltiplichiamo la (21) per $\psi_{t\mu}$, essendo t, μ indici qualunque da 1 a r e sommiamo rispetto a μ otteniamo

$$(22) \quad \sum_{k\mu}\left(\alpha_{ik}\psi_{t\mu}\frac{\partial\alpha_{j\mu}}{\partial a_k} - \alpha_{jk}\psi_{t\mu}\frac{\partial\alpha_{i\mu}}{\partial a_k}\right) = c_{ijt}.$$

Ma si ha

$$\sum_\mu \psi_{t\mu}\alpha_{j\mu} = \varepsilon_{tj}\ , \quad \sum_\mu \psi_{t\mu}\alpha_{i\mu} = \varepsilon_{ti}$$

e quindi derivando

$$\sum_\mu \psi_{t\mu}\frac{\partial\alpha_{j\mu}}{\partial a_k} = -\sum_\mu \alpha_{j\mu}\frac{\partial\psi_{t\mu}}{\partial a_k}$$

$$\sum_\mu \psi_{t\mu}\frac{\partial\alpha_{i\mu}}{\partial a_k} = -\sum_\mu \alpha_{i\mu}\frac{\partial\psi_{t\mu}}{\partial a_k}\ ,$$

onde la (22) diventa

$$\sum_{k\mu}\alpha_{jk}\alpha_{i\mu}\frac{\partial\psi_{t\mu}}{\partial a_k} - \sum_{k\mu}\alpha_{ik}\alpha_{j\mu}\frac{\partial\psi_{t\mu}}{\partial a_k} = c_{ijt}$$

e permutando nella seconda somma gli indici di sommazione k, μ abbiamo

$$\sum_{k\mu}\alpha_{jk}\alpha_{i\mu}\left(\frac{\partial\psi_{t\mu}}{\partial a_k} - \frac{\partial\psi_{tk}}{\partial a_\mu}\right) = c_{ijt}$$

Infine moltiplicando quest'ultima per

$$\psi_{i\lambda}\psi_{j\nu}$$

e sommando rispetto a i, j si ottengono le equazioni cercate

$$(\text{II}) \quad \frac{\partial\psi_{t\lambda}}{\partial a_\nu} - \frac{\partial\psi_{t\nu}}{\partial a_\lambda} = \sum_{ij} c_{ijt}\psi_{i\lambda}\psi_{j\nu}$$

Come le (II) si deducono dalle (22), così, invertendo il calcolo ora eseguito, si vede che le (22) seguono dalle (II), alle quali equivalgono dunque perfettamente

Le equazioni (II) furono stabilite da Maurer.
La questione proposta si riduce dunque a trovare r^2 funzioni ψ_{ik} delle $a_1\, a_2 \dots a_r$ a determinante non nullo e che soddisfino le equazioni (II) di Maurer.

§ 29

Dimostrazione di Schur del secondo e terzo teorema fondamentale.

Con un opportuno artificio si può trovare, come Schur dimostra, un sistema di r^2 funzioni ψ che soddisfino le (II), integrando soltanto un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti, ciò che richiede solo, come è ben noto, operazioni algebriche, la risoluzione della così detta equazione caratteristica.
Così non soltanto si trovano le cercate trasformazioni infinitesime $A_1 f, A_2 f \dots A_r f$, ma si dimostra che occorrono per ciò soltanto operazioni algebriche.
A tale scopo operiamo nelle (II) un cangiamento di variabili e di funzioni incognite ponendo

$$a_1 = \lambda_1 t\,,\ a_2 = \lambda_2 t\,, \dots\dots\dots a_r = \lambda_r t$$

$$t\,\psi_{ik}(a_1\, a_2 \dots a_r) = \theta_{ik}(\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_r ; t)\ ;$$

con ciò le (II)

$$\frac{\partial \psi_{i\alpha}}{\partial a_\beta} - \frac{\partial \psi_{i\beta}}{\partial a_\alpha} = \sum_{ij} c_{ijs}\, \psi_{i\alpha}\, \psi_{j\beta}$$

diventano

$$(II^*)\qquad \frac{\partial \theta_{i\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{i\beta}}{\partial \lambda_\alpha} = \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\, \theta_{j\beta}$$

Ora si integri il sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie rispetto a t

(23) $$\frac{\partial \theta_{s\alpha}}{\partial t} = \varepsilon_{s\alpha} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\alpha} \qquad (s, \alpha = 1, 2 \dots r)$$

colle condizioni iniziali

(24) $$\theta_{s\alpha} = 0 \quad \text{per } t = 0,$$

dove nella integrazione si riguarderanno le λ come costanti (parametri). Dalla forma di queste equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti risulta subito che le funzioni $\frac{\theta_{s\alpha}}{t}$ conterranno le variabili $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r, t$ appunto nei prodotti

$$\lambda_1 t,\ \lambda_2 t, \dots \lambda_r t;$$

e ora dimostreremo che le $\theta_{s\alpha}$ così determinate soddisferanno le (II*), e per ciò le $\psi_{s\alpha}$ soddisferanno le (II) come si voleva.

Pongasi infatti

(25) $$V_{s\alpha\beta} = \frac{\partial \theta_{s\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{s\beta}}{\partial \lambda_\alpha} - \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\, \theta_{j\beta}$$

e si derivi rispetto a t osservando le (23); si avrà

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta}\Big[\varepsilon_{s\alpha} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\alpha}\Big] - \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\Big[\varepsilon_{s\beta} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\beta}\Big] -$$

$$- \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{j\beta}\Big[\varepsilon_{i\alpha} + \sum_{h\nu} c_{h\nu i}\, \lambda_\nu\, \theta_{h\alpha}\Big] -$$

$$- \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\Big[\varepsilon_{j\beta} + \sum_{h\nu} c_{h\nu j}\, \lambda_\nu\, \theta_{h\beta}\Big],$$

ossia

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \sum_i c_{i\beta s}\, \theta_{i\alpha} - \sum_i c_{i\alpha s}\, \theta_{i\beta} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j \Big(\frac{\partial \theta_{i\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{i\beta}}{\partial \lambda_\alpha}\Big) - \dots$$

$$\ldots - \sum_j c_{\alpha js}\,\theta_{j\beta} - \sum_j c_{j\beta s}\,\theta_{i\alpha} - \sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu i}\,\lambda_\nu\,\theta_{j\beta}\,\theta_{k\alpha} -$$

$$- \sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu j}\,\lambda_\nu\,\theta_{i\alpha}\,\theta_{k\beta}$$

Le somme semplici si distruggono per la prima delle relazioni (I) per le c e ponendo per

$$\frac{\partial\theta_{i\alpha}}{\partial\lambda_\beta} - \frac{\partial\theta_{i\beta}}{\partial\lambda_\alpha}$$

l'espressione data dalla (25)

$$V_{i\alpha\beta} + \sum_{k\nu} c_{k\nu i}\,\theta_{k\alpha}\,\theta_{\nu\beta}$$

resta

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \sum_{ij} c_{ijs}\,\lambda_j\,V_{i\alpha\beta} - \sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{\nu ki}\,\lambda_j\,\theta_{k\alpha}\,\theta_{\nu\beta} -$$

$$- \sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu i}\,\lambda_\nu\,\theta_{j\beta}\,\theta_{k\alpha} - \sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu j}\,\lambda_\nu\,\theta_{i\alpha}\,\theta_{k\beta}$$

e permutando nella seconda delle somme quadruple gli indici j, ν e nell'ultima eseguendo sugli indici la sostituzione ciclica $(ik\nu j)$ si vede che le tre somme quadruple si distruggono.

Dunque le $V_{s\alpha\beta}$, definite dalle (25) soddisfano alle equazioni lineari omogenee

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \sum_{ij} c_{ijs}\,\lambda_j\,V_{i\alpha\beta}\ ;$$

d'altronde per $t=0$ si annullano, a causa delle condizioni iniziali (24), e per conseguenza sono sempre nulle, ciò che dimostra sussistere le (II*)

Così dunque abbiamo dimostrato:

Dato un sistema di r^3 costanti c_{iks}, che verifichino le (I), si possono trovare, con sole operazioni algebriche, r trasformazioni infinitesime indipendenti

$$A_i f = \sum_k \alpha_{ik}(a_1, a_2 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k}$$

in r variabili $a_1, a_2, \dots a_r$ che soddisfino alle relazioni di composizione

$$(A_i, A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f$$

e generino quindi un gruppo G_r -

§ 30

Composizione di due serie ∞^r di trasformazioni

Coi tre teoremi di cui ci siamo occupati nel presente capitolo abbiamo posto i fondamenti per la teoria generale dei gruppi continui finiti G_r a coppie di trasformazioni inverse, le cui equazioni finite sono contenute in un'unica serie ∞^r

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a_1, a_2 \dots a_r)$$

Già al §. 4 abbiamo indicato che si possono considerare gruppi più generali a r parametri le cui trasformazioni in luogo di formare una sola serie ∞^r, costituiscono più di tali serie od anche un numero infinito ma discreto. Ora vogliamo dimostrare quanto fu allora asserito che lo studio di tali gruppi misti si riporta ad gruppi G_r combinati con ordinarii gruppi discontinui.

sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1\dots r} \psi_{jk}(a)\,\xi_{ji}(x'),$$

per le quali il determinante delle ψ non è identicamente nullo. Se diamo quindi alle a un particolare sistema di valori $a^{(0)}$, tale soltanto che sia

$$|\psi_{jk}(a^{0})| \neq 0,$$

segue dal teorema alla fine del § 16 che le trasformazioni

$$S_{a^{(0)}}^{-1} S_a$$

formano il gruppo G_r, a coppie di trasformazioni inverse, generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x_1, x_2 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

D'altronde se fissiamo una trasformazione qualunque $T_{b^{(0)}}$ della serie (27), possiamo soddisfare alla relazione

$$S_a T_b = S_{a^{(0)}} T_{b^{(0)}}$$

cioè alle

(32) $\theta_\lambda(a, b) = \theta_\lambda(a^{(0)}, b^{(0)})$ $(\lambda = 1, 2 \dots r)$

sia prendendo ad arbitrio S_a e calcolandone T_b sia inversamente. Se scriviamo la (32) così:

$$S_{a^{(0)}}^{-1} S_a = T_{b^{(0)}} T_b^{-1}$$

vediamo che $T_{b^{(0)}} T_b^{-1}$ percorre le stesse trasformazioni come $S_{a^{(0)}}^{-1} S_a$, cioè le trasformazioni del gruppo G_r. Indicando queste ultime col simbolo E_λ, avremo

$$S_a = S_{a(0)} E_\lambda$$

e poichè l'inversa $T_b T_{b(0)}^{-1}$ di $T_{b(0)} T_b^{-1}$ è pure una E

$$T_b = E_\mu T_{b(0)}$$

Viceversa se E_λ percorre le trasformazioni di un gruppo G_r ed $S_{a(0)}$, $T_{b(0)}$ sono due trasformazioni fisse arbitrarie, è chiaro che le due serie ∞^r

$$S_{a(0)} E_\lambda \quad , \quad E_\lambda T_{b(0)}$$

godono della voluta proprietà perchè

$$(S_{a(0)} E_\lambda) . (E_\mu T_{b(0)}) = S_{a(0)} (E_\lambda E_\mu) T_{b(0)} =$$
$$= S_{a(0)} E_\nu T_{b(0)}$$

contiene i soli r parametri della trasformazione composta E_ν - Abbiamo dunque stabilito il teorema:

Affinchè due serie ∞^r di trasformazioni S_a, T_b diano luogo ad una serie composta $S_a T_b$ con soli r parametri essenziali, è necessario e sufficiente che esista un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse, tali che indicando con E_λ una trasformazione variabile in G_r e con A, B due trasformazioni fisse, l'una della prima l'altra della seconda serie, ogni trasformazione della prima serie sia data da

$$S_a = A E_\lambda$$

ed ognuna della seconda da

$$T_b = E_\mu B \; .$$

Se supponiamo in particolare che le due serie ∞^r coincidano, si dovrà avere

$$S_{a(0)} E_\lambda = E_\mu S_{a(0)} ,$$

cioè

$$S_{a(0)}^{-1} E_\mu S_{a(0)} = E_\lambda ,$$

onde abbiamo il teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni S_a gode della proprietà che la trasformazione composta di due qualunque della serie abbia solo r parametri essenziali, la serie stessa ha la forma

$$S_a = A E_\lambda ,$$

ove E_λ percorre le trasformazioni di un gruppo G_r ed A è una trasformazione fissa (qualunque) nella serie, che dovrà soddisfare alla condizione

$$A^{-1} G_r A = G_r ,$$

cioè sarà permutabile col gruppo.

§ 31

Serie ∞^r di trasformazioni nelle quali i prodotti di m trasformazioni sono nella serie

Passiamo ora a risolvere la questione seguente:
Quali condizioni deve verificare una serie ∞^r di trasformazioni perchè componendo m trasformazioni qualunque della serie nasca sempre una trasformazione della serie stessa, nè ciò accada componendone un numero minore?

Osserviamo in primo luogo che la trasformazione composta di due della serie dovrà contenere solo r parametri, perchè se ne contenesse di più questi non potrebbero più sparire componendovi le successive. Applicando il secondo teorema del § precedente, vediamo intanto che le trasformazioni della nostra serie avranno certo la forma

$$S_\lambda = AE_\lambda$$

del detto teorema. Ora componendo due qualunque trasformazioni della serie

$$AE_\lambda \ , \ AE_\mu$$

essendo $AE_\mu A^{-1} = E_\nu$ e $AE_\mu = E_\nu A$, si ha

$$(AE_\lambda).(AE_\mu) = A^2 E_\nu$$

In generale componendo s trasformazioni della serie, si avrà una trasformazione della forma

$$A^s E_\lambda$$

La nostra ipotesi porta adunque che si abbia

$$A^m E_\lambda = AE_\mu \,,$$

cioè

$$A^{m-1} = E_\nu \,,$$

vale a dire che la potenza $(m-1)^{ma}$ di A appartenga a G_r, ma nessuna altra potenza d'ordine inferiore.

Concludiamo che: Ogni serie della specie voluta si ottiene colle sostituzioni E_λ di un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse una trasformazione fissa A permutabile col gruppo G_r, e tale che la potenza A^{m-1} di A, ma

nessuna potenza d'ordine inferiore, appartenga a G_r.

È necessario ricordare che per l'esatta applicazione di questo teorema conviene limitarsi a considerare quelle trasformazioni della serie che giacciono in un intorno convenientemente ristretto della A, poichè la validità del teorema alla fine del § 16 sul quale ci siamo appoggiati è soggetta appunto ad una tale limitazione.

Se si applica il teorema superiore al caso $m = 2$, cioè nell'ipotesi che la serie S_a costituisca un gruppo Γ, senza supporre che in Γ vi sia l'identità nè coppie di trasformazioni inverse, vediamo che in tal caso le trasformazioni di Γ appartengono ad un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse. Se ne conclude che le equazioni di qualsiasi gruppo finito a r parametri si ottengono da quelle di un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse con un cangiamento di parametri o per prolungamento analitico. Così appare l'opportunità, nella teoria dei gruppi continui finiti, di limitarsi alla considerazione dei gruppi G_r a coppie di trasformazioni inverse.

§ 32

I gruppi misti

Si supponga ora di avere un numero dapprima finito, diciamo m, di serie di trasformazioni continue

ciascuna r parametri

$$x'_i = f_i^{(k)}(x_1, x_2 \dots x_n;\ a_1^{(k)}, a_2^{(k)} \dots a_r^{(k)})$$
$$i = 1, 2 \dots n$$
$$k = 1, 2 \dots m$$

e che queste m serie, insieme considerate, formino un gruppo misto. Considerando ciascuna di queste serie per sè e paragonandole due a due saranno applicabili i teoremi del §30. Quindi, indicando con $S_1, S_2 \dots S_m$ m trasformazioni fisse prese nelle rispettive serie e con

$$S^{r}_{a^{(1)}}\ ,\ S^{r}_{a^{(2)}} \dots\dots S^{r}_{a^{(m)}}$$

trasformazioni variabili nelle serie stesse, risulta che le m serie

$$S_1^{-1} S_{a^{(1)}}\ ,\ S_2^{-1} S_{a^{(2)}} \dots\dots S_m^{-1} S_{a^{(m)}}$$

coincidono in un unico gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse, gruppo permutabile con tutte le trasformazioni delle serie. Indicando con E_a una trasformazione variabile in G_r le m serie saranno date dalle trasformazioni

(33) $$S_1 E_a\ ,\ S_2 E_a \dots\dots S_m E_a$$

Ora se si moltiplicano tutte queste trasformazioni per una qualunque di esse si riprodurranno (poichè formano un gruppo) le trasformazioni stesse, ma di più essendo le S permutabili col gruppo G_r le m serie non faranno che permutarsi fra loro. E invero il prodotto $S_i S_k$ appartenendo alle serie stesse ha necessariamente la forma

binando una serie con r_i parametri con un'altra a r_k parametri si ottiene un'unica serie il numero dei cui parametri essenziali è al massimo $r_i + r_k$ e, supposto $r_i \geq r_k$, al minimo r_i. Perciò quelle fra le serie che hanno il numero massimo r di parametri costituiscono già di per sè un gruppo misto Γ' della specie sopra considerata e in particolare vi è in Γ' un sottogruppo G_r (una particolare serie)

$$a) \quad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\ a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

contenente l'identità. Ma allora se con questo combiniamo le sostituzioni di un'altra delle serie con $r_k \leq r$ parametri

$$b) \quad x_i'' = \varphi_i(x_1'\, x_2' \ldots x_n';\ b_1\, b_2 \ldots b_k)$$

la serie composta ha r parametri ed è quindi in Γ'. Ma in questa serie è contenuta completamente la b) perchè in a) vi è l'identità. Si può dunque senz'altro sopprimere la serie b) come già contenuta in un'altra di Γ'.

Dalle ricerche ultime risulta come lo studio dei gruppi continui finiti si riduca in sostanza unicamente a quello dei gruppi G_r generati da r trasformazioni infinitesime $X_1f, X_2f, \ldots X_rf$, e contenenti l'identità e con ogni trasformazione la sua inversa. In seguito ci occuperemo quindi oramai solo di questi gruppi G_r, sui quali si concentra tutto l'interesse.

Capitolo III°

Equazioni di definizione di un gruppo G_r – Ordine delle trasformazioni infinitesime –

§ 33

Eliminazione di costanti arbitrarie da un sistema di funzioni

Un gruppo G_r è perfettamente definito dalle sue r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x_1 x_2 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

soddisfacenti alle condizioni di composizione

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

La più generale trasformazione infinitesima di un tale G_r è data da

$$\mathfrak{X}f = \sum_k^{1\dots r} e_k X_k f = \sum_i^{1\dots n}\sum_k^{1\dots r} e_k \xi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

dove $e_1, e_2 \dots e_r$ sono r costanti arbitrarie – I coefficienti ξ_i di una tale trasformazione $\mathfrak{X}f$ essendo dati da

$$\xi_i = \sum_k^{1\dots r} e_k \xi_{ki} \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

contengono (linearmente ed omogeneamente) le r costanti

arbitrarie a_k.

Fissato le ξ_{ki} è individuato il gruppo G_r e quindi le espressioni delle ξ_i. – Ora invece di dare esplicitamente le ξ, si possono anche definire come le soluzioni più generali di un certo sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali, che hanno grande importanza in molte ricerche e diconsi le equazioni di definizione del gruppo.

Per arrivare a costruire il sistema in discorso dobbiamo premettere alcune osservazioni generali sulla eliminazione di costanti da un gruppo di funzioni di un numero qualunque di variabili indipendenti.

Siano $z_1, z_2 \dots z_m$ m funzioni di n variabili indipendenti $x_1, x_2 \dots x_n$, contenenti inoltre r parametri (o costanti) $a_1, a_2 \dots a_r$, che potremo supporre e supponiamo essenziali, sia

$$(1) \qquad z_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\ a_1\, a_2 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots m$$

Dovendo considerare nel seguito le derivate dei varii ordini delle z, è opportuno introdurre una notazione abbreviata per indicarle; e noi porremo

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = z_{i;k} \quad , \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} = z_{i;k_1 k_2} \ , \ \dots$$

in generale

$$\frac{\partial^s z_i}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_s}} = z_{i;k_1 k_2 \ldots k_s} :$$

Ciò posto, aggiungiamo alle (1) le equazioni che ne risultano con una prima derivazione

$$(1_1) \qquad z_{i;k} = f_{i;k}(x, a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots m \\ k = 1, 2 \ldots n \end{cases},$$

indi quelle che se ne ottengono con una seconda derivazione

$$(1_2) \qquad z_{i;k_1 k_2} = f_{i;k_1 k_2}(x, a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots m \\ k_1 k_2 = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

e così continuiamo protraendo le derivazioni finchè sia possibile l'eliminazione degli r parametri dal sistema delle equazioni

$$(1), \ (1_1) \ , (1_2) \ldots\ldots$$

ciò che necessariamente dovrà accadere, come ora andiamo a precisare. Riprendendo a tale scopo le considerazioni del § 3, indichiamo con μ_0 la caratteristica della matrice funzionale delle (1) cioè delle f_i rispetto ai parametri, con μ_1 quella del sistema (1), (1_1) cioè delle funzioni

$$f_i \ \text{e} \ f_{i;k} \, ,$$

indi con μ_2 quella del sistema (1), (1_1) e (1_2), ossia delle funzioni

$$f_i \ , f_{i;k} \ , f_{i;k_1 k_2}$$

e così di seguito. Per quanto abbiamo visto al § 3 i numeri

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2 \dots\dots,$$

che sono tutti $\leq r$, formano una serie crescente fino al massimo $= r$ (perchè gli r parametri $\underline{a}$ sono per ipotesi essenziali) e da quel punto in poi la serie delle μ è stazionaria. Indichiamo con μ_{s-1} la prima $\mu = r$ e avremo

$$\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 \dots \mu_{s-2} < \mu_{s-1} = r$$

Il sistema di equazioni

$$(1), (1_1), (1_2) \dots (1_{s-1}),$$

avendo la matrice funzionale dei secondi membri rispetto agli r parametri $\underline{a}$ appunto la caratteristica r, è certo risolubile rispetto a questi parametri $\underline{a}$, che risulteranno così espressi per le x, le z e le loro derivate fino all'ordine $s-1$. Questi valori delle $\underline{a}$ sostituiti nelle equazioni stesse $(1), (1_1) \dots (1_{s-1})$ danno luogo ad un numero q di equazioni in termini finiti fra le x le z e le loro derivate fino all'ordine $s-1$:

$$(2) \qquad W_j(x, z_i, z_{i;k} \dots z_{i;k_1 k_2 \dots k_{s-1}}) = 0$$
$$j = 1, 2 \dots q$$

Questo numero q eguaglia la differenza fra il numero totale delle equazioni $(1), (1_1) \dots (1_{s-1})$ ed il numero r. Se indichiamo in generale con ε_k il numero delle derivate delle $\underline{z}$ d'ordine k (*), e per simmetria poniamo

(*) Evidentemente è $\varepsilon_k = m \dfrac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!}$

mo $\xi_0 = m$, avremo

(α) $$q = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{s-1} - r$$

Consideriamo altresì le successive equazioni (A_s) cioè

$$z_{i;k_1k_2\dots k_s} = f_{i;k_1k_2\dots k_s}(x, a)$$

e poniamo al posto delle a le loro espressioni per le x, le z e le derivate fino all'ordine $s-1$; avremo tante equazioni del tipo

(β) $$z_{i;k_1k_2\dots k_s} = \psi_i^{(k_1k_2\dots k_s)}(x, z_i, z_{i;k} \dots z_{i;k_1\dots k_{s-1}})$$

mediante le quali tutte le ξ_s derivate parziali d'ordine s delle z sono espresse per quelle d'ordine inferiore, delle z e delle x. Il sistema di equazioni a derivate parziali (α), (β) è appunto quello che ci proporremo di costruire.

§ 34

Il sistema (α), (β) come sistema di Mayer
Proprietà di questi sistemi

Riconosciamo subito alcune importanti proprietà di questo sistema ricordando che esso è soddisfatto dalle funzioni date

$$z_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n; a_1 \dots a_r)$$

contenenti r costanti essenziali arbitrarie. Se assumiamo oltre le z_i, come altrettante nuove funzioni incognite le derivate delle z fino all'ordine $s-1$, potremo sostituire

Dagli sviluppi del § precedente risulta in generale che: Se un sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali è tale che nella espressione del suo integrale generale entri solo un numero finito di costanti arbitrarie, esso è equivalente ad un sistema di Mayer.

Spesso volte è opportuno sostituire alle equazioni (α) di un sistema di Mayer un sistema equivalente ottenuto nel modo seguente. Può darsi che fra le equazioni del sistema (α) ve ne siano di quelle contenenti solo le x, z, ovvero che vi siano di tali equazioni conseguenze del sistema (α). Poniamo che esistano precisamente ν_0 relazioni fra le sole x, z, conseguenza del sistema (α). Per riconoscere il valore di ν_0 basta il calcolo della caratteristica di una matrice cioè della matrice funzionale di

$$W_1\,,\ W_2\,,\ \ldots\ W_q$$

rispetto alle

$$z_{i;h}\,,\ z_{i;h_1h_2}\ \ldots\ z_{i;h_1h_2\ldots h_{s-1}}$$

Se questa caratteristica è data da σ_0 che è necessariamente $\leq q$, sarà

$$\nu_0 = q - \sigma_0 \quad (*)$$

(*) L'essere σ_0 quella caratteristica significa che fra le funzioni $W_1, W_2 \ldots W_q$ le x e le z sussistono $q - \sigma_0 = \nu_0$ relazioni indipendenti le quali per $W_1=0$, $W_2=0$ ... $W_q=0$ danno altrettante relazioni fra le x e le z.

Similmente indichiamo con ν_1 il numero delle relazioni fra le

$$x\,,\; z\,,\; z_{i;k}$$

che seguono dalle (α), non computando le ν_0 precedenti fra le x, z; con ν_2 il numero delle relazioni, conseguenze delle (α), fra le x, z e le derivate prime e seconde. I numeri

$$\nu_0\,,\; \nu_1\,,\; \nu_2 \dots\dots \nu_{s-1}$$

si calcoleranno, come il primo ν_0, osservando i valori delle caratteristiche di matrici funzionali, e si avrà naturalmente

$$\nu_0+\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{s-1} = q$$

e quindi

$$r = (\varrho_0-\nu_0)+(\varrho_1-\nu_1)+\dots+(\varrho_{s-1}-\nu_{s-1})$$

Al sistema (α) possiamo sostituire un sistema equivalente formato 1° da ν_0 equazioni che esprimono ν_0 delle z per le rimanenti z e per le x, 2° da ν_1 equazioni che danno ν_1 delle derivate prime delle z espresse per le rimanenti $\varrho_1-\nu_1$ per le z e per le x ecc... in generale ν_k delle derivate d'ordine k rimangono espresse per le rimanenti $\varrho_k-\nu_k$ e per quelle d'ordine inferiore $(k=0, 1, 2, \dots s-1)$

È chiaro che sarà sempre

$$\nu_k < \varrho_k\,;$$

perchè se tutte le ϱ_k derivate d'ordine k potessero esprimersi per quelle d'ordine inferiore, essendo $k<s$, ciò

ciò contraddirebbe alla prima a) delle proprietà del sistema di Mayer —

§ 35

Le equazioni di definizione di un gruppo G_r

Applichiamo ora le osservazioni generali dei due §§. precedenti alla formazione di quel sistema di equazioni a derivate parziali (del tipo di Mayer) cui soddisfano i coefficienti ξ_i della più generale trasformazione infinitesima

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

del gruppo G_r generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Avendosi

$$(3) \qquad \xi_i = e_1 \xi_{1i} + e_2 \xi_{2i} + \dots + e_r \xi_{ri}$$

$$i = 1, 2 \dots n,$$

le ξ contengono linearmente ed omogeneamente le r costanti essenziali arbitrarie $e_1\, e_2 \dots e_r$ — Secondo quanto si è detto in generale al § 33, si associeranno alle (3) le equazioni

$$(3_1) \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = e_1 \frac{\partial \xi_{1i}}{\partial x_k} + \dots\dots + e_r \frac{\partial \xi_{ri}}{\partial x_k}$$

$$i, k = 1, 2 \dots n$$

ottenute dalle (3) derivando una prima volta, indi quelle ottenute con due derivazioni:

$$(3_2) \qquad \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l} = e_1 \frac{\partial^2 \xi_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} + \cdots\cdots e_r \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial x_k \partial x_l}$$

$$i, k, l = 1, 2, \ldots n$$

E così si seguiterà, protraendo le derivazioni fino a quell'ordine $s-1$ che rende possibile l'eliminazione di tutte le r e dalle equazioni

$$(3), (3_1), (3_2) \cdots (3_{s-1})$$

Ciò darà luogo ad un certo numero

$$q = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_{s-1} - r$$

di relazioni fra le ξ_i e le loro derivate fino all'ordine $\underline{s-1}$. E utilizzando poi le seguenti equazioni (3_s), si esprimeranno tutte le ε_s derivate d'ordine $\underline{s}$ delle ξ per le derivate d'ordine inferiore per le ξ e per le x. Essendo le (3) lineari ed omogenee nelle $\underline{e}$, tutte le equazioni del sistema di Mayer che così si ottengono saranno chiaramente lineari ed omogenee nelle ξ e le loro derivate; esse saranno dunque del tipo:

$$(D) \qquad \sum_i^{1\ldots r} A_{\mu i}\, \xi_i + \sum_{i,k} B_{\mu k i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \cdots\cdots = 0$$

$$(\mu = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$$

Esse diconsi le equazioni di definizione del gruppo, perchè definiscono l'insieme di tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo e quindi il gruppo stesso.

Supponiamo ora inversamente di avere un si-

stema di Mayer (II) lineare ed omogeneo nelle n funzioni incognite $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_n$ delle n variabili indipendenti e domandiamo come si riconoscerà se le equazioni (II) costituiranno le equazioni di definizione di un gruppo.

Intanto, il sistema (II) essendo di Mayer, nell'integrale generale $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_n$ entrerà un numero finito r di costanti; ma poichè le (II) sono lineari ed omogenee, si potrà porre l'integrale generale sotto la forma

$$\xi_i = \sum_k^{1\dots r} e_k\, \xi_{ki}\,,$$

dove $e_1\,, e_2 \dots e_r$ sono le r costanti arbitrarie e

$$\xi_{k1}\,, \ \xi_{k2} \dots\, \xi_{kn} \qquad (k = 1, 2 \dots r)$$

sono r sistemi indipendenti di integrali particolari.

La trasformazione infinitesima

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sarà la trasformazione generale di un gruppo G_r se le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2 \dots r)$$

sono tali che soddisfino alle condizioni di composizione, che cioè l'espressione alternata

$$(X_k\,, X_l) = \sum_i^{1\dots n} \left\{ X_k(\xi_{li}) - X_l(\xi_{ki}) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_i^{1\dots n} \sum_\nu^{1\dots n} \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{li}}{\partial x_\nu} - \xi_{l\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

si componga linearmente (con coefficienti costanti) colle $X_k f$ stesse. Ciò vuol dire che pel sistema (D) deve aver luogo la terza proprietà

c) Se $(\xi_{k1}, \xi_{k2} \dots \xi_{kn})$, $(\xi_{l1}, \xi_{l2} \dots \xi_{ln})$ sono due particolari soluzioni del sistema (D) anche le espressioni

$$\xi_i = \sum_\nu \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{li}}{\partial x_\nu} - \xi_{l\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right)$$

debbono essere soluzioni -

È questa la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di Mayer (D) costituisca le equazioni di definizione di un gruppo G_r -

§. 36

Altro modo di definire un gruppo continuo finito - Cenno sui gruppi continui infiniti

In luogo di definire un gruppo continuo finito per mezzo di un sistema (D) di equazioni a derivate parziali di cui i coefficienti della sua generatrice trasformazione infinitesima sono gli integrali, si può anche formare un sistema di equazioni a derivate parziali del tipo di Mayer a cui soddisfano le funzioni f_i che figurano nelle sue trasformazioni finite

(1) $\qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a_1\ a_2 \dots a_r)$

Basta per ciò procedere secondo il metodo generale

del § 33, eliminando le r costanti a fra le (4) e le equazioni (4_1) (4_2).... che ne seguono per derivazione rispetto alle x sufficientemente protratta. Si costruirà così un sistema di Mayer

$$(5) \qquad W_\lambda \left(x'_1, x'_2 \dots x'_n, \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_l} \dots\dots \right) = 0$$

$$\lambda = 1, 2 \dots\dots$$

del quale le (4) costituiranno l'integrale generale.

A causa della proprietà caratteristica di un gruppo, un tale sistema (5) di Mayer è così costituito che se

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_i(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \psi_i(x_1, x_2 \dots x_n) \end{array} \right\} i = 1, 2 \dots n$$

ne sono due particolari soluzioni, anche le funzioni

$$\psi_i(\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x))$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

ne daranno una nuova soluzione

Le proprietà precedenti, convenientemente estese, servono a Lie per definire i gruppi continui infiniti.

Suppongasi di avere ancora un sistema di equazioni

$$(5^*) \qquad W\left(x'_1, x'_2 \dots x'_n, \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_l} \dots\dots \right) = 0$$

ma che l'integrale generale di un tale sistema non dipenda da un numero finito di costanti arbitrarie

(non equivalga ad un sistema di Mayer), bensì da un numero infinito di tali costanti o, per adoperare un linguaggio più preciso, nel suo integrale generale entrino delle funzioni arbitrarie. Allora se al sistema competerà ancora la proprietà superiore che due soluzioni particolari

$$\varphi_1(x_1\, x_2 --- x_n)\ ,\ \varphi_2(x_1\, x_2 --- x_n) ..... \varphi_n(x_1 -- x_n)$$

$$\psi_1(x_1 --- x_n)\ ,\ \psi_2(x_1 -- x_n) . ---- \psi_n(x_1 .. x_n)$$

diano luogo per composizione ad una terza soluzione

$$\psi_1(\varphi_1(x), \varphi_2(x) -- \varphi_n(x)); ---- \psi_n(\varphi_1(x) --- \varphi_n(x)),$$

le trasformazioni finite date dall'integrale generale

$$x_i' = \theta_i(x_1, x_2 --- x_n)$$

si diranno costituire un gruppo continuo infinito -

Così, come già abbiamo accennato al § 4, il concetto di gruppo continuo infinito viene limitato da Lie nel senso che le trasformazioni finite del gruppo debbono esser date dagli integrali di un sistema (o*)[c] di equazioni a derivate parziali -

Per illustrare queste definizioni con esempi, osserviamo che la totalità delle trasformazioni della forma

(6) $x_1' = \theta_1(x_1)\ ,\ x_2' = \theta_2(x_2)\ , ------ .\ x_n' = \theta_n(x_n)$

dove la θ_i è una funzione arbitraria dell'argomento x_i, formano evidentemente un gruppo nel senso ge-

nerale ed anche un gruppo continuo infinito nel senso di Lie. Le (6) danno infatti l'integrale generale del sistema di equazioni a derivate parziali

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = 0 \text{, per } i \neq k.$$

Invece se nelle (6) prendiamo per $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ la medesima funzione arbitraria θ, è chiaro che le formole

(6*) $x'_1 = \theta(x_1),\ x'_2 = \theta(x_2) \dots x'_n = \theta(x_n)$

definiscono ancora un gruppo nel senso generale, ma non un gruppo infinito di Lie perchè, stante l'arbitrarietà della θ, è impossibile definire le (6*) come integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali.

Esempi notevoli di gruppi continui infiniti nel senso di Lie sono il gruppo delle trasformazioni conformi (che conservano gli angoli) nel piano — Le equazioni finite del gruppo:

$$x' = x'(x,y) \quad , \quad y' = y'(x,y)$$

sono caratterizzate dal sistema ben noto di equazioni a derivate parziali del 1° ordine:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \text{ ,}$$

che esprime essere $x' + iy'$ funzione della variabile complessa $x + iy$ — In secondo luogo il gruppo delle trasformazioni equivalenti (che conservano le aree) caratterizzate dall'unica equazione del 1° ordine

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)} \mp 1$$

Accenniamo in fine che un gruppo continuo infinito di Lie si può egualmente definire per mezzo di un sistema lineare omogeneo alle derivate parziali, come il sistema (D) del § 35, cui soddisfano i coefficienti ξ_i delle sue trasformazioni infinitesime.

Ad un tale sistema (D) deve ancora appartenere la proprietà c) del § 35; ma il sistema stesso non deve essere più un sistema di Mayer, dovendo entrare nel suo integrale generale delle funzioni arbitrarie.

Così pel gruppo delle trasformazioni conformi, essendo ξ, η i coefficienti della più generale trasformazione infinitesima, le equazioni di definizione del gruppo sono

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} \,,\; \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \,,$$

e per quelle del gruppo delle trasformazioni equivalenti si riducono all'unica

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \,.$$

Si verificherà subito che sussiste qui appunto la proprietà c) del § 35.

Mutando le variabili x nelle y, la $\mathfrak{X}f$ si trasforma (§ 11) in

$$\mathfrak{X}f = \Sigma X(y_i)\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

e per valutare l'ordine della $\mathfrak{X}f$ nelle y (nell'origine) bisogna sviluppare i coefficienti $\mathfrak{X}y_i$ in serie di potenze delle y ed osservare quale è l'ordine più basso dei termini che rimangono. Intanto, sviluppando $\mathfrak{X}y_i$ per potenze delle x, si ha

$$\mathfrak{X}y_i = \sum_\lambda a_{i\lambda}\,\xi_\lambda^{(k)} + \ldots$$

ed i termini d'ordine più basso sono d'ordine k nelle x, nè possono tutti sparire perchè non tutte le $\xi^{(k)}$ sono nulle ed i $|a_{i\lambda}| \neq 0$. Invertendo le (8), le x si esprimono per serie di potenze delle y dove non mancano i termini di primo ordine e quindi esprimendo $\mathfrak{X}y_i$ per le y anzichè per le x l'ordine rimane sempre $= k$, c. d. d.

Paragoniamo ora due trasformazioni infinitesime

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Yf = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

di ordini rispettivi h, k e formiamo la trasformazione infinitesima alternata

$$(X, Y) = \sum_i [X(\eta_i) - Y(\xi_i)]\frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_i \sum_\lambda \left(\xi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\lambda} - \eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

Poichè le ξ, η sono dei rispettivi ordini h, k, e la derivazione fa diminuire l'ordine di un'unità, si vede che spariscono certamente nella (X, Y) tutti i termini di ordine inferiore ad $h+k-1$, senza che si possa escludere che spariscano ancora i termini d'ordine $h+k-1$ o d'ordine superiore –

Si ha quindi il teorema. Se le due trasformazioni Xf, Yf sono degli ordini h, k, la trasformazione alternata (X, Y) è almeno d'ordine $h+k-1$ (*) –

Ne segue che se le due trasformazioni sono ciascuna d'ordine >1, l'alternata (X, Y) ha certamente un ordine superiore a quello dell'una e dell'altra trasformazione –

§ 38

Distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime di un gruppo

Siano

$$X_1 f \ , X_2 f, \ldots \ldots X_r f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di un

(*) Che non si possa in generale precisare l'ordine della (X, Y) risulta chiaro se si pensa che può anche essere identicamente $(X, Y) = 0$

Dato il gruppo G_r, queste trasformazioni infinitesime generatrici non sono perfettamente determinate, ma possono essere sostituite da r loro combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, fra loro indipendenti; in altre parole le $X_1f, X_2f \dots X_rf$ sono determinate solo a meno di una sostituzione lineare omogenea (a coefficienti costanti) di determinante non nullo.

Ora fissato un punto qualunque $x_i^{(0)}$ dello spazio, nell'intorno del quale i coefficienti ξ_{ki} delle X_kf siano regolari, si possono scegliere le trasformazioni generatrici in guisa che i loro ordini offrano una successione perfettamente determinata dal punto, ciò che si ottiene nel modo seguente.

Una trasformazione infinitesima qualunque del gruppo è data da

$$(8) \qquad \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \dots + \lambda_r X_r f$$

colle λ costanti e noi cerchiamo in primo luogo quante di queste trasformazioni, linearmente indipendenti e d'ordine >0 vi sono nel gruppo. Per ciò dovremo eguagliare a zero nello sviluppo della espressione (8) per serie di potenze di

$$x_1 - x_1^{(0)}, \; x_2 - x_2^{(0)} \dots x_n - x_n^{(0)}$$

tutti i termini costanti, ciò che darà un certo numero k di equazioni lineari omogenee nelle λ.

(*) Questo numero k sarà al massimo n e potrà an-

Se diciamo r_0 la caratteristica di questo sistema lineare, nelle cercate trasformazioni si potranno prendere ad arbitrio $r-r_0$ delle λ e le altre r_0 saranno determinate (linearmente ed omogeneamente) da queste, cioè: esisteranno precisamente nel gruppo $r-r_0$ trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine >0. Assumendole come le $r-r_0$ ultime delle $X_k f$, cioè come $X_{r_0+1}f, \dots X_r f$, le prime r_0 che indichiamo con

$$X_1^{(0)}f\,;\ X_2^{(0)}f \dots X_{r_0}^{(0)}f$$

saranno tutte di ordine zero e nessuna loro combinazione lineare avrà un ordine superiore.

Cerchiamo ora fra le combinazioni lineari di

$$X_1^{(0)}f, X_2^{(0)}f \dots X_{r_0}^{(0)}f; X_{r_0+1}f, \dots X_r f$$

quante indipendenti vi ne sono d'ordine ≥ 1. In una tale combinazione lineare non potranno entrare le prime r_0 perchè essa sarebbe allora d'ordine zero, giacchè è di quest'ordine la parte proveniente da $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)} \dots X_r^{(0)}$ e la rimanente è invece d'ordine >0. Le combinazioni cercate avranno dunque la forma

$$(9)\qquad \mu_1 X_{r_0+1} + \mu_2 X_{r_0+2} + \dots + \mu_{r-r_0} X_r\,,$$

colle μ costanti. Nello sviluppo della (9) per serie sono nulli i termini costanti e scrivendo che sono nulli anche tutti quelli del 1° ordine, avremo un si...

---

che rendere a zero, ove tutte le $X_i f$ siano di ordine superiore.

stema di equazioni lineari nelle x_i, la cui caratteristica indicheremo con r_1. – Le espressioni (9) indipendenti e d'ordine >1 sono allora $r - r_0 - r_1$. – Sostituendo queste ad $r - r_0 - r_1$ delle $X_{r_0+1} \dots X_r$, le rimanenti r_1 che indicheremo con

$$X_1^{(1)}f,\ X_2^{(1)}f, \dots\dots X_{r_1}^{(1)}f$$

saranno tutte d'ordine = 1 e nessuna loro combinazione sarà d'ordine maggiore. Proseguendo nello stesso modo verremo evidentemente a scegliere le trasformazioni generatrici disposte in sistemi comprendenti ciascuno trasformazioni del medesimo ordine e tali che ogni combinazione lineare delle trasformazioni d'ordine r_k d'uno stesso sistema avrà pure l'ordine r_k e non mai un ordine superiore.

Indicando con

$$(\gamma)\quad [X_1^{(0)} X_2^{(0)} \dots X_{r_0}^{(0)}],\ [X_1^{(1)} X_2^{(1)} \dots X_{r_1}^{(1)}] \dots\dots [X_1^{(k)} X_2^{(k)} \dots X_{r_k}^{(k)}]$$
$$\dots\dots [X_1^{(l)} X_2^{(l)} \dots X_{r_l}^{(l)}]$$

questi sistemi, avremo evidentemente

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_k + \dots + r_l$$

Il calcolo di questi numeri

$$r_0\ r_1 \dots\dots r_l$$

si fa nel modo più semplice, riducendosi a calcolare caratteristiche di matrici. – In generale, siccome $r - r_0 - r_1 \dots - r_k$ è il numero delle trasformazioni infinitesime del gruppo linearmente indipendenti e

d'ordine r_k, si calcolerà questo numero dalla caratteristica del sistema lineare nelle λ che si ha eguagliando a zero, nello sviluppo dell'espressione

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f,$$

tutti i termini d'ordine 0, 1, 2, ... k; tale caratteristica sarà appunto $r_0 + r_1 + \cdots + r_k$. Siccome i termini iniziali dello sviluppo di $\sum_k \lambda_k X_k f$ sono evidentemente

$$\sum_k \lambda_k \xi_{ki}(x^{(0)}),$$

così r_0 sarà la caratteristica della matrice

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} \xi_{11}(x^{(0)}) & \xi_{12}(x^{(0)}) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x^{(0)}) \\ \xi_{21}(x^{(0)}) & \xi_{22}(x^{(0)}) & \cdots\cdots & \xi_{2n}(x^{(0)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x^{(0)}) & \xi_{r2}(x^{(0)}) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x^{(0)}) \end{Vmatrix}$$

Analogamente $r_0 + r_1$ sarà la caratteristica della matrice $\mathfrak{M}_1$ formata aggiungendo ad $\mathfrak{M}$ altrettante colonne formate con tutte le derivate prime delle ξ_{ki} e così via.

È da osservarsi che siccome l'ordine di una trasformazione infinitesima non muta cangiando le variabili (§ 37), anche i numeri $r_0\ r_1 \ldots r_k$ dipenderanno solo dal gruppo e dal punto a cui sono relativi non mutando al cangiare di coordinate.

Osserviamo in fine che, una volta scelte le z tra-

sformazioni infinitesime generatrici di G_r nel modo indicato nel quadro (γ), si calcolerà subito l'ordine di qualunque trasformazione infinitesima del gruppo — Questa sarà una loro combinazione lineare e il suo ordine eguaglierà l'ordine più basso dei sistemi le cui trasformazioni vi figurano effettivamente —

§ 39

Calcolo dei numeri τ dalle equazioni di definizione del gruppo

La serie di numeri

$$\tau_0 \quad \tau_1 \ldots\ldots \tau_\ell$$

è dapprima relativa al punto $x_i^{(0)}$, nell'intorno del quale si eseguiscono gli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime, e può cambiare quando si cangia il punto — Ma se i punti che si confrontano sono scelti nello spazio in modo generale, evitando soltanto di farli cadere sopra certe varietà eccezionali, che ora definiremo più da vicino, le due serie di numeri τ rimarranno sempre le stesse — Per dimostrarlo costruiamo le matrici M_0, M_1, M_2 ...... del § precedente lasciando le $x^{(0)}$ variabili comunque e indicandole dunque con x :

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_0 = \begin{Vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x) \end{Vmatrix} \\ \\ \mathfrak{M}_1 = \begin{Vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x) & \dfrac{\partial \xi_{11}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \xi_{1n}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x) & \dfrac{\partial \xi_{r1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \xi_{rn}}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \\ \\ \mathfrak{M}_2 = - - - - - - - - - \end{cases}$$

e siano r_0, r_0+r_1, $r_0+r_1+r_2$, ... le loro rispettive caratteristiche. Siccome, in virtù delle equazioni di definizione del gruppo (§ 35), per qualunque delle sue trasformazioni infinitesime

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

le derivate s^{me} delle ξ si esprimono linearmente ed omogeneamente per quelle d'ordine inferiore risulta da quanto abbiamo detto al § 3 (*) che i numeri

$$r_0\,,\ r_1\,,\ r_2\ \cdots\cdots\ r_{s-1}$$

sono tutti diversi da zero ed i seguenti tutti nulli inoltre

$$r_0 + r_1 + \cdots\cdots + r_{s-1} = r$$

(*) Basta applicare quei teoremi generali prendendo per le funzioni f le ξ_i che contengono gli r parametri essenziali e nelle loro espressioni $\xi_i = \sum_k e_k\, \xi_{ki}$

Ora finchè diamo ad $x^{(o)}$ una posizione tale che le caratteristiche delle corrispondenti matrici conservino i loro valori generici che hanno per le x variabili, è chiaro che i numeri r avranno sempre i medesimi valori. Le varietà eccezionali sopra accennate sono dunque quelle che eventualmente si ottengono eguagliando a zero tutti i minori d'ordine r_0 di $\mathfrak{M}_0$ o tutti quelli d'ordine $r_0 + r_1$ di $\mathfrak{M}_1$, ec... Così è dimostrato quanto sopra abbiamo asserito rispetto all'invariabilità dei numeri r.

Per calcolare i valori dei numeri r col metodo precedente occorre conoscere le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo. Ora importa osservare che si può anche eseguire questo calcolo conoscendo soltanto le equazioni di definizione del gruppo, nella qual cosa ci limiteremo a calcolare i valori generici delle r.

Prendiamo queste equazioni (D) § 35 e, nel modo indicato al § 34, operiamo la risoluzione del sistema rispetto a ν_0 delle ξ, a ν_1 delle loro derivate prime, a ν_2 delle derivate seconde ...., ν_{s-1} delle derivate d'ordine $s-1$ e in fine a tutte le ξ derivate d'ordine s.

Osserviamo subito che nelle equazioni lineari (D) così risolute compariranno in generale certe funzioni delle x ai denominatori onde potrà darsi che in un punto $x_i^{(o)}$ ove sono regolari le ξ_{ki} non lo siano invece i coefficienti delle (D) risolute. Intendiamo che il punto $x_i^{(o)}$ attorno al quale effettuiamo lo sviluppo

in serie di potenze delle ξ_i non appartenga a questa classe particolare. Se questo sviluppo è dato da:

$$\xi_i = c_i + \sum_k c_{ik}(x_k - x_k^{(0)}) + \sum_{kl} c_{ikl}(x_k - x_k^{(0)})(x_l - x_l^{(0)}) + \dots\dots$$

i primi coefficienti c_i non sono altro che i valori delle ξ nel punto $x_i^{(0)}$, i secondi c_{ik} quelli delle loro derivate prime, i seguenti c_{ikl} (salvo fattori numerici) quelli delle derivate seconde e così via. Ora i valori iniziali delle ξ e loro derivate fino all'ordine $s-1$ sono unicamente vincolati dalle equazioni di definizione che lasciano arbitrari

$\xi_0 - \nu_0$ coefficienti c_i dei termini d'ordine zero
$\xi_1 - \nu_1$ coefficienti dei termini di 1° ordine
$\xi_2 - \nu_2$ " " di 2° ordine
– – – – – – – – – – – – – – – –
$\xi_{s-1} - \nu_{s-1}$ " " di $(s-1)^{mo}$ ordine,

mentre quelli dei termini d'ordine s o superiore si esprimono tutti linearmente ed omogeneamente per questi.

Dunque intanto se negli sviluppi delle ξ si annullano tutti i coefficienti dei termini fino all'ordine $s-1$, si annullerebbero anche tutti i seguenti e le ξ sono per ciò identicamente nulle; ne concludiamo:

Se nel punto $x_i^{(0)}$ si comportano regolarmente i coefficienti delle equazioni di definizione del gruppo risolute, non esiste nel gruppo alcuna trasformazione d'ordine s o

superiore - Per un dato punto generico esiste dunque un limite superiore $s-1$ per l'ordine delle trasformazioni infinitesime del gruppo, come risulta anche da quanto si è detto sopra -

Cerchiamo ora in generale quante trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine $>k$ vi sono nel gruppo (dove naturalmente si suppone $k<s-1$). Per ciò dovremo uguagliare nello sviluppo di ξ_i tutti i coefficienti dei termini degli ordini $0, 1, 2 \ldots k$ e resteranno quindi arbitrari

$$(\xi_{k+1}-\nu_{k+1})+(\xi_{k+2}-\nu_{k+2})+\cdots+(\xi_{s-1}-\nu_{s-1})$$

coefficienti in tutti i termini d'ordine superiore a k; altrettante saranno dunque le trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine $>k$ - Per quanto si è visto alla fine del § precedente è adunque

$$r-r_0-r_1 \cdots\cdots r_k=(\xi_{k+1}-\nu_{k+1})+\cdots\cdots+(\xi_{s-1}-\nu_{s-1})$$

Supposto $k>0$ possiamo cangiare in questa k in $k-1$ e sottraendo deduciamo

$$(10) \qquad r_k=\xi_k-\nu_k$$

Questa formola dimostrata così per $k>0$ vale anche per $k=0$, giacchè si ha

$$r-r_0=(\xi_1-\nu_1)+(\xi_2-\nu_2)+\cdots+(\xi_{s-1}-\nu_{s-1})$$

e per la (2^*) § 34

$$r=(\xi_0-\nu_0)+(\xi_1-\nu_1)+\cdots\cdots+(\xi_{s-1}-\nu_{s-1})$$

Colla (10) si calcolano effettivamente, come si voleva, i numeri caratteristici

$$\tau_0 , \tau_1 , \tau_2 \dots \tau_{s-1}$$

unicamente conoscendo le equazioni di definizione del gruppo – Abbiamo dunque il teorema: Se le equazioni di definizione del gruppo possono risolversi rispetto a ν_0 delle ξ, a ν_1 delle derivate prime, ν_2 delle derivate seconde ...., ν_{s-1} delle derivate d'ordine $s-1$ e a tutte le derivate di ordine s, i valori (generici) dei numeri caratteristici τ, per ogni punto ove i coefficienti delle equazioni risolute si comportano regolarmente sono dati da

$$\tau_0 = \varepsilon_0 - \nu_0 \quad , \tau_1 = \varepsilon_1 - \nu_1 , \; \text{-----} \; \tau_{s-1} = \varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1} ,$$

indicando con ε_k il numero totale delle derivate d'ordine k delle ξ –

Indirettamente risulta di qui che nei punti delle varietà eccezionali definite al principio del paragrafo i coefficienti delle equazioni (I) risolute non possono comportarsi regolarmente –

§ 40

Sottogruppi di G_r generati dalle trasformazioni degli ordini superiori

Qualunque sia il punto $x_i^{(0)}$ rispetto al quale con-

sideriamo i diversi ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici di G_r, potremo sceglierle queste nel modo indicato nel quadro (γ) al § 38 – Questa distribuzione delle trasformazioni generatrici di G_r pone in evidenza l'esistenza in G_r di speciali sottogruppi(*). Consideriamo infatti quelle trasformazioni infinitesime di G_r i cui ordini superano un dato ordine k; esse si compongono linearmente con quelle trasformazioni del quadro (γ) che si ottengono sopprimendo i primi $k+1$ sistemi, cioè con

$$(10)\quad [X_1^{(k+1)} X_2^{(k+1)} \ldots\ldots X_{r_{k+1}}^{(k+1)}] \ldots\ldots\ldots\ldots [X_1^{(l)} X_2^{(l)} \ldots\ldots X_{r_l}^{(l)}] .$$

Ora se per due qualunque trasformazioni $X_i^{(p)}$ $X_j^{(q)}$ di questo quadro si costruisce l'espressione alternata

$$[X_i^{(p)} X_j^{(q)}]$$

questa, pel teorema alla fine del § 37, sarà almeno d'ordine $p+q-1$ e quindi certamente d'ordine $> k$; essa sarà conseguentemente una combinazione lineare delle trasformazioni stesse in (10) – Applicando allora il secondo teorema fondamentale (§ 23), vediamo che le trasformazioni (10), le quali sono in numero di

$$r - r_0 - r_1 - \ldots\ldots - r_k$$

generano un gruppo con altrettanti parametri, che

(*) Col nome di sottogruppo di un gruppo G si indica un gruppo le cui operazioni sono tutte contenute in G

è adunque un sottogruppo di G_r. Si ha quindi il teorema: Quelle trasformazioni infinitesime di G_r che hanno un ordine superiore ad un ordine fissato k generano un sottogruppo di G_r con $r - r_0 - r_1 - \dots - r_k$ parametri; i numeri r avendo il significato fissato al § 38.

Il caso particolare più importante, che vogliamo ora specialmente considerare, è quello di $k = 0$, ove le trasformazioni d'ordine > 0 generano un sottogruppo con $r - r_0$ parametri - Si osservi che essendo r_0 la caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \dots & \xi_{1n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x^0) & \dots & \xi_{rn}(x^0) \end{Vmatrix}$$

si ha certamente $r_0 \leq n$ per cui se supponiamo $n < r$, abbiamo $r - r_0 \geq r - n$, onde il teorema:

Ogni gruppo G_r ad r parametri sopra $n < r$ variabili possiede certamente sottogruppi con $r - n$ o più parametri

Consideriamo in generale il sottogruppo G_{r-r_0} generato dalle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore rispetto al punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)}\, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$, che per semplicità assumiamo nell'origine $(0, 0 \dots 0)$.

Ogni trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

gode della proprietà che in P_0 si annullano contempora-

ramente le ξ e perciò la direzione della caratteristica fissata dalle proporzioni

$$dx_1 : dx_2 : \ldots\ldots : dx_n = \xi_1 : \xi_2 : \ldots\ldots : \xi_n$$

resta ivi indeterminata. Gli incrementi

$$\xi_1 \delta t\,,\ \xi_2 \delta t\,, \ldots\ldots \xi_n \delta t$$

che ricevono le coordinate di P_0 applicandovi la trasformazione infinitesima sono evidentemente nulli, cioè la Xf lascia stazionario il punto P_0. Ma facilmente vediamo che non solo per la trasformazione infinitesima Xf, ma anche per le trasformazioni finite del gruppo G_1 ad un parametro generato da Xf resta P_0 stazionario (fisso). Basta invero applicare la formola fondamentale (17) § 10

$$x_i' = x_i + t\, X x_i + \frac{t^2}{1.2} X^2 x_i + \ldots\ldots$$

facendovi $x_i = 0$ ed osservando che per le $x_i = 0$ si annullano le ξ e quindi tutte le

$$Xf = \Sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,,\quad X^2 f = \left(\Sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \ldots\ldots \text{(*)}$$

(*) In altro modo anche così: Le equazioni in termini finiti del gruppo G_1 si ottengono integrando le equazioni

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', x_2', \ldots\ldots x_n')$$

colle condizioni iniziali

$$x_i' = 0 \quad \text{per } t = 0$$

Ma poichè tutte le ξ si annullano per le $x' = 0$, il sistema $x_i' = 0$ per t qualunque è un sistema integrale ed è quindi l'unico possibile

Risulta di qui che le trasformazioni finite di G_{r-r_0} lasciano fisso il punto P_0. Ora è a priori evidente che tutte quelle trasformazioni di G_r che lasciano fisso P_0 formano un sottogruppo a coppie di trasformazioni inverse e contenente quindi in ogni caso un gruppo di Lie G_{r-r}, che si vede subito coincidere con G_{r-r_0}, poichè le trasformazioni infinitesime generatrici di G_{r-r} debbono lasciare P_0 stazionario ed essere quindi d'ordine >0. Dunque: Il sottogruppo G_{r-r_0} generato dalle $r-r_0$ trasformazioni infinitesime di G_r d'ordine superiore rispetto a P_0 consta di quelle trasformazioni finite di G_r che lasciano fisso P_0. Lo diremo per ciò il sottogruppo di stabilità del punto P_0.

Quando siano note le equazioni finite

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots\ldots a_r)$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

del gruppo G_r, si trovano subito anche quelle del sottogruppo G_{r-r_0} che lascia fisso un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$; basterà infatti legare gli r parametri $\underline{a}$ colle relazioni

$$x_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)} \ldots\ldots x_n^{(0)} ; a_1 \ldots a_r),$$

e se queste costituiscono r_0 relazioni indipendenti fra le $\underline{a}$ rimarranno $r-r_0$ parametri liberi e il detto sottogruppo avrà appunto $r-r_0$ parametri (*)

(*) Può darsi anche che sia $r_0 = r$ e quindi il sottogruppo

Già dal § 38 risulta come si calcolano le $r-r_0$ trasformazioni generatrici del sottogruppo G_{r-r_0} - Qui vogliamo esprimerle sotto nuova forma nell'ipotesi che r_0 abbia il suo valore generico, cioè eguagli la caratteristica h della matrice

$$\alpha)\quad \begin{Vmatrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \cdots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x) & \xi_{22}(x) & \cdots & \xi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \cdots & \xi_{rn}(x) \end{Vmatrix}$$

Poniamo, per fissare le idee, che sia diverso da zero il minore principale d'ordine h

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdots & \xi_{1h}(x^0) \\ \xi_{21}(x^0) & \cdots & \xi_{2h}(x^0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{h1}(x^0) & \cdots & \xi_{hh}(x^0) \end{vmatrix}$$

e quindi anche

$$\beta)\quad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdots & \xi_{1h}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{h1}(x) & \cdots & \xi_{hh}(x) \end{vmatrix}.$$

Allora per le prime h trasformazioni infinite-

(*) che lascia fermo P_0 si riduce alla sola identità o ad un gruppo discontinuo. In tal caso restringendo il campo di variabilità dei parametri attorno ai valori corrispondenti all'identità si potrà ridurre il sottogruppo alla sola identità -

sime $X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_h f$ (considerate come forme linea-ri nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) non passa alcuna relazione lineare del la forma

$$\chi_1 X_1 f + \chi_2 X_2 f + \cdots + \chi_h X_h f = 0$$

colle χ funzioni delle x (*); ma invece tutte le seguenti $X_{h+1} f, \ldots X_r f$ si esprimono linearmente ed omogenea-mente, con coefficienti variabili, per $X_1, X_2 \ldots X_h$ -

Se poniamo:

$$X_{h+j} f = \varphi_{j1} X_1 f + \varphi_{j2} X_2 f + \cdots + \varphi_{jh} X_h f$$

$$j = 1, 2, \ldots r-h,$$

saranno le φ funzioni delle x date da quozienti di mi-nori d'ordine h della matrice α) il denominatore essen-do il minore β), che è diverso da zero non solo per le x qualunque, ma anche per $x = x^0$ -

Allora le $r-h$ trasformazioni infinitesime indi-pendenti

$$X_{h+j} f - \varphi_{j1}(x^0) X_1 f - \varphi_{j2}(x^0) X_2 f - \cdots - \varphi_{jh}(x^0) X_h f.$$

$$j = 1, 2 \ldots r-h$$

hanno tutte un ordine superiore a zero e sono quin-di le cercate trasformazioni generatrici del sottogruppo G_{r-h} (o G_{r-r_0}) che lascia fisso P_0 -

---

(*) Per le χ costanti ciò si intende da sè e vale per qualunque h essendo $X_1 f \ldots\ldots X_r f$ trasformazioni indipendenti.

§ 41

Esempio del gruppo dei movimenti

Per illustrare le teorie esposte nel presente capitolo prendiamo un esempio semplicissimo, quello del gruppo dei movimenti dello spazio che è a 6 parametri ed è quindi generato da sei trasformazioni infinitesime che si tratta di calcolare. Basta per ciò considerare le tre traslazioni infinitesime lungo gli assi coordinati e le tre rotazioni infinitesime attorno a questi. Esse sono date da

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_6 f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}$$

Le espressioni alternate hanno i valori

$$\begin{cases} (X_1X_2)=0, & (X_1X_3)=0, & (X_2X_3)=0 \\ (X_1X_4)=-X_2, & (X_2X_5)=-X_3, & (X_3X_6)=-X_1 \\ (X_1X_5)=0, & (X_2X_6)=0, & (X_3X_4)=0 \\ (X_4X_5)=X_6, & (X_5X_6)=X_4, & (X_6X_4)=X_5 \\ (X_1X_6)=X_3, & (X_2X_4)=X_1, & (X_3X_5)=X_2 \end{cases}$$

che sono combinazioni lineari delle X; questo, se già

non lo sapessimo, ci direbbe che quelle sei trasformazioni infinitesime generano un gruppo.

Formiamo, secondo il §35, le equazioni di definizione del nostro gruppo eliminando per derivazione le 6 costanti e dai valori dei coefficienti ξ nella espressione della più generale trasformazione infinitesima del gruppo;

$$\mathfrak{X}f = e_1 X_1 f + \cdots\cdots + e_6 X_6 f$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \xi_1 = e_1 + e_4 y - e_6 z \\ \xi_2 = e_2 - e_4 x + e_5 z \\ \xi_3 = e_3 - e_5 y + e_6 x \end{cases}$$

e derivando ed eliminando le e abbiamo per le equazioni di definizione del gruppo le 6 seguenti del 1º ordine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_3}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \xi_3}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

insieme con quelle del 2º ordine che risultano dall'uguagliare a zero tutte le derivate seconde. Qui abbiamo evidentemente $s = 2$

$$\varepsilon_0 = 3 \qquad \varepsilon_1 = 9$$
$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 6$$

indi

$$\sigma_0 = 3 \qquad \sigma_1 = 3$$

Siccome i coefficienti delle nostre equazioni di defi-

nizione risolute sono tutti costanti, e si comportano sempre regolarmente, non vi sono punti eccezionali e per ogni punto dello spazio abbiamo tre trasformazioni infinitesime di ordine zero e tre di 1° ordine, nessuna di ordine superiore. Così p. e. per l'origine le prime tre sono

$$X_1 f \quad X_2 f \quad X_3 f$$

e le seconde

$$X_4 f \quad X_5 f \quad X_6 f$$

Queste generano dunque il sottogruppo a tre parametri che lascia fisso l'origine, cioè il gruppo delle rotazioni attorno a questa. Per un punto qualunque dello spazio basta naturalmente sostituire alle tre ultime le altre

$$(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial y} - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial z} - (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Se invece di considerare il gruppo dei movimenti dello spazio consideriamo quello G_3 del piano, abbiamo per le sue trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_3 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$$

con

$$(X_1 X_2) = 0\,, \quad (X_1 X_3) = -X_2 f\,, \quad (X_2 X_3) = X_1 f$$

Le equazioni di definizione del gruppo sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = 0,$$

associate con quelle che si ottengono uguagliando a zero tutte le derivate seconde (che sono del resto conseguenze delle superiori)(*).

Qui si ha $s = 2$

$$\varepsilon_0 = 2 \qquad \varepsilon_1 = 4$$

$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 3$$

indi $\qquad \tau_0 = 2 \qquad \tau_1 = 1$ ec.

Si possono facilmente estendere le cose ora dette al gruppo di movimenti del generale spazio (Euclideo) a n dimensioni — Questi movimenti sono rappresentati dalle formole

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k + c_i ,$$

dove le a_{ik} sono i coefficienti della più generale sostituzione ortogonale (destrorsa) e le c_i sono parametri arbitrarî — È questo un gruppo a $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri, generato dalle $\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinite-

(*) Si osservi che queste equazioni di definizione del gruppo di movimenti, risultano dall'associare quelle del gruppo conforme a quelle del gruppo equivalente (§ 36) — In effetto i movimenti del piano sono (insieme coi ribaltamenti) le uniche trasformazioni del piano che siano insieme conformi ed equivalenti.

sime

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad X_{ik} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i \neq k)$$

Le equazioni di definizione del gruppo sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \end{cases}$$

con

$$\varepsilon_0 = n \ , \quad \varepsilon_1 = n^2 ; \quad \nu_0 = 0 , \quad \nu_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi

$$r_0 = n \quad , \quad r_1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Capitolo IV°

Funzioni e varietà invarianti rispetto ad un gruppo - Gruppi transitivi e intransitivi - Gruppi imprimitivi - Gruppi sistatici ed asistatici -

§ 42

Funzioni invarianti

Se una funzione $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ è tale che eseguendovi una certa trasformazione

$$(S) \qquad x_i' = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad i = 1, 2 \ldots n$$

si abbia identicamente

$$\Phi(f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)) = \Phi(x_1, x_2 \dots x_n)$$

si dice che la Φ è invariante rispetto alla trasformazione S, ovvero che essa ammette questa trasformazione.

Quando la Φ ammetta tutte le trasformazioni di un gruppo G_r, diremo che è un invariante rispetto a G_r, od anche che ammette il gruppo stesso.

Ricerchiamo ora un criterio per decidere se una data funzione Φ ammette il gruppo G_1 ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Siccome il gruppo G_1 è perfettamente caratterizzato (§ 10) dalle equazioni differenziali

$$(1) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$$

colle condizioni iniziali

$$x'_i = x_i \quad \text{per } t=0,$$

la funzione $\Phi(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$ è una funzione perfettamente determinata delle x e di t e si ha per le (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} \xi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n) = X'\Phi$$

Affinchè Φ sia un invariante di G_1 è necessario e sufficiente che sia indipendente da t, cioè $X\Phi = 0$; dunque:

Il gruppo G_1 generato da una trasformazione infinit-

simale Xf ha per invarianti tutte e sole le soluzioni dell'equazione a derivate parziali $X\Phi = 0$.

Quando $X\Phi = 0$ si può dire che la funzione Φ ammette la trasformazione infinitesima Xf, onde il risultato precedente si può anche enunciare dicendo che: una funzione Φ ammette un gruppo G_1 se ne ammette la trasformazione infinitesima generatrice.

È ben noto che ogni soluzione comune a due equazioni a derivate parziali

$$Xf = 0 \,, \quad Yf = 0$$

è anche soluzione della terza

$$(X, Y)f = 0$$

Questa proprietà può ora enunciarsi così: Ogni invariante comune ai due gruppi ad un parametro Xf, Yf è anche invariante del gruppo $(X, Y)f$.

§. 43

Varietà nello spazio S_n

Dobbiamo ora passare a considerare delle totalità di punti nello spazio S_n che vengono trasformate in sè stesse dalle trasformazioni di un gruppo, tali cioè che ogni punto di quella totalità, per qualsiasi trasformazione del gruppo, si trasporta in un altro punto della totalità stessa. È necessario per ciò che premettiamo alcune brevi nozioni generali sulle

possibili totalità di punti (varietà o molteplicità) nello spazio S_n –

Si ottiene nel modo più generale una tal varietà ponendo le n coordinate $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ del punto eguali a n funzioni qualunque di $m < n$ variabili indipendenti $u_1, u_2 \ldots\ldots u_m$, colle formole

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2 \ldots\ldots u_m)$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

Supposto che nelle φ le m variabili u siano essenziali, cioè che le φ non possano esprimersi per un numero di variabili, la varietà si dice una varietà V_m a m dimensioni – Perchè il numero delle dimensioni sia effettivamente m occorre e basta che la matrice funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ \varphi_n)}{\partial(u_1\ u_2 \ldots\ u_m)}$$

sia di caratteristica m (cf. § 3) – Quando la varietà sia ad una dimensione, dicesi anche una curva.(*)

In luogo di definire la varietà V_m per mezzo delle (2) esplicitamente, si può anche definire per mezzo di $n - m$ equazioni fra le x che siano indipendenti

$$(2^*) \quad \Omega_1(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Omega_{n-m}(x_1\ x_2 \ldots x_n) = 0$$

(*) Per $m = 2$ la varietà dicesi una superficie, per $m = n-1$ un' ipersuperficie

Quando le (2) siano equivalenti ad un sistema (2.*) di equazioni lineari nelle x la V_m dicesi una varietà (o spazio subordinato) lineare e si indica con S_m; se $m=1$ si dice una retta – Questa è definita da due suoi punti $(x_i^{(0)})$ $(x_i^{(1)})$ p. e. colle formole

$$x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) . u ,$$

essendo u il parametro –

Se consideriamo in S_n una curva qualunque

$$x_i = x_i(u) \qquad i = 1, 2 . . . n$$

e preso un punto fisso $x_i^{(0)}$ sulla curva lo congiungiamo con una retta con un punto vicino $x_i^{(1)}$ sulla curva, indi facciamo avvicinare indefinitamente $x_i^{(1)}$ a $x_i^{(0)}$ la corda che li congiunge converge verso una posizione limite definita dalle formole

$$x_i = x_i^{(0)} + \left(\frac{dx_i}{du}\right)_0 . v .$$

Questa retta dicesi la tangente nel punto $x_i^{(0)}$ alla curva ed i valori

$$\xi_i = \left(\frac{dx_i}{du}\right)_0$$

chiamansi le costanti di direzione della curva nel punto – Cangiando in un modo qualunque il parametro u esse si alterano solo per un fattore comune; possono dirsi per ciò coordinate omogenee dell'elemento in quella direzione –

Si considerino uscenti da un medesimo punto $x_i^{(0)}$ m direzioni colle rispettive costanti di direzione

$$(\xi_i^{(1)}),\ (\xi_i^{(2)}) \ldots\ldots (\xi_i^{(m)})$$

La varietà lineare definita dalle formole

$$(3) \qquad x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)} u_1 + \xi_i^{(2)} u_2 + \ldots + \xi_i^{(m)} u_m$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

dove $u_1\ u_2 \ldots\ldots u_m$ sono $\underline{m}$ parametri, contiene tutte le $\underline{m}$ direzioni; essa sarà ad $\underline{m}$ dimensioni, cioè un S_m, se $\underline{m}$ è la caratteristica della matrice

$$\| \xi_i^{(1)}\ \xi_i^{(2)} \ldots\ldots \xi_i^{(m)} \| \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

In tal caso le $\underline{m}$ direzioni diconsi indipendenti. Al contrario se la caratteristica è $r < m$, allora le $\underline{m}$ direzioni giacciono in un S_r e diconsi dipendenti.

Supposto di essere nel primo caso, ogni altra direzione uscente da $x_i^{(0)}$ nell'S_m dato dalle (3) avrà per costanti ξ_i di direzione $\underline{n}$ combinazioni lineari omogenee

$$(4) \qquad \xi_i = \lambda_1 \xi_i^{(1)} + \lambda_2 \xi_i^{(2)} + \ldots + \lambda_m \xi_i^{(m)}$$

delle prime $\underline{m}$ e viceversa, qualunque siano le costanti λ, questa direzione giace nell'S_m dato dalle (3).

Si osservi ora che per un punto (ordinario) di una varietà V_m

$$x_i = \varphi_i(u_1\ u_2 \ldots\ldots u_m)$$

si possono condurre $\underline{m}$ direzioni indipendenti tangenti alla varietà, p. e. le $\underline{m}$ che hanno per costanti di direzione

$$\xi_1^{(r)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_r}\,, \quad \xi_2^{(r)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_r} \ldots\ldots \xi_n^{(r)} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_r}$$

$$r = 1, 2, \ldots\ldots m$$

mentre ogni altra direzione tangente alla varietà giace nell' S_m individuato da quelle m; questo dicesi lo spazio lineare S_m tangente nel punto alla varietà.

Quando le equazioni della varietà sono date sotto la forma (2*)

$$\Omega_j(x_1\, x_2 \ldots x_n)=0 \qquad j=1,\, 2 \ldots n-m$$

lo spazio S_m tangente sarà definito dalle $n-m$ equazioni simultanee lineari nei differenziali:

$$(3^*) \qquad \sum_k \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k}\, dx_k = 0$$

§. 44
Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_1

Diciamo che una varietà V_m ammette una trasformazione

$$S) \qquad x_i' = f_i(x_1,\, x_2 \ldots x_n)$$

quando per la S ogni punto di V_m si trasporta in un altro punto di V_m — E se la V_m ammette tutte le trasformazioni di un gruppo, diciamo che la V_m è una varietà invariante rispetto al gruppo, o che ammette il gruppo —

Domandiamoci ora in primo luogo sotto quali condizioni una varietà V_m ammetterà un gruppo G_1 ad un parametro generato da una trasformazione infini-

tesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Siccome i punti di V_m devono muoversi per le trasformazioni di G_1 entro V_m stessa, è manifestamente per ciò necessario e sufficiente che le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m giacciano interamente in V_m - Dunque nei punti di V_m la direzione della traiettoria, che ha le costanti di direzione

$$\xi_1 \quad \xi_2 \dots\dots \xi_n$$

deve essere tangente alla varietà; cioè se nelle ξ esprimiamo le x per le u, dovranno le ξ_i risultare da combinazioni lineari omogenee delle

$$\xi_i^{(k)} = \frac{\partial x_i}{\partial u_k}$$

secondo le (4)

$$(5) \quad \xi_i = \sum_k^{1\dots m} \eta_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \qquad i = 1, 2, \dots n,$$

dove le η saranno convenienti funzioni delle u -

Queste esprimono che le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m toccano V_m, cioè che la V_m ammette la trasformazione infinitesima Xf - Ma tale condizione necessaria è altresì sufficiente perchè la V_m ammetta il gruppo G_1, generato dalla Xf. E infatti, supposte soddisfatte le (5), si considerino entro V_m le curve integrali delle equazioni differenziali

$$(6) \quad \frac{du_1}{\eta_1} = \frac{du_2}{\eta_2} = \dots\dots = \frac{du_m}{\eta_m} = dt .$$

Queste curve, considerate come esistenti nello spazio ambiente S_n, soddisfano, a causa delle (5) e delle (6), le equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = - - - - = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt$$

e sono per ciò le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m - Esse giacciono in V_m, che è dunque varietà invariante rispetto a G_1 -

Si osservi che il gruppo G_1, in quanto opera entro la varietà V_m, dà luogo ad un gruppo Γ_1 per la varietà stessa -

Le considerazioni superiori dimostrano che dalla espressione Xf della trasformazione infinitesima di G_1 si ottiene subito quella $U\Phi$ di Γ_1, ponendo

$$(7) \qquad U\Phi = \sum_k^{1 \dots m} \eta_k \frac{\partial \Phi}{\partial u_k},$$

le η essendo da calcolarsi dalla (5) -

In ciò che precede si è tacitamente supposto che nei punti di V_m non tutte le ξ contemporaneamente si annullino -

Se questo caso si presenta, vuol dire che i singoli punti di V_m restano fissi per le trasformazioni di G_1, perchè la Xf è in tutti i punti di V_m d'ordine >0 (§ 40).

La V_m è certo allora una varietà invariante, anzi una varietà di punti fissi ed il gruppo Γ_1 si riduce all' identità -

Quando le equazioni della varietà V_m in luogo di esser date sotto la forma esplicita (2), lo sono sotto la forma implicita (2*), troviamo subito le condizioni perchè la varietà ammetta il gruppo Xf, esprimendo che la direzione $(\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n)$ della traiettoria di G_1 uscente da un punto di V_m deve toccare la V_m - Per ciò basta sostituire le ξ_k al posto dei dx_k nella (3*) §43, ciò che dà

$$\sum_k \xi_k \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k} = X\Omega_j = 0$$

$$(j = 1, 2 \dots n-m),$$

relazioni che debbono aver luogo sulla varietà. Dunque: Affinchè la varietà V_m definita da

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n) = 0, \ \Omega_2(x_1 \dots x_n) = 0 \dots \Omega_{n-m}(x_1 \dots x_n) = 0$$

ammetta il gruppo Xf è necessario e sufficiente che in forza di queste equazioni risultino soddisfatte le

$$X\Omega_1 = 0, \ X\Omega_2 = 0 \dots X\Omega_{n-m} = 0$$

È bene osservare il caso particolare in cui le equazioni della varietà sono risolute rapporto ad $n-m$ delle x, p. e. della forma

$$\Omega_1 = x_{m+1} - \varphi_{m+1}(x_1\ x_2 \dots x_m) = 0, \dots \Omega_{n-m} = x_n - \varphi_n(x_1\ x_2 \dots x_m),$$

che possiamo considerare come un caso particolare delle (2), ove si faccia

$$u_1 = x_1, \ u_2 = x_2 \dots u_m = x_m$$

$$y_1 = u_1 \,,\; y_2 = u_2 \,\ldots\ldots\ldots\, y_m = u_m$$

Le (5) ci danno allora

$$\eta_1 = \xi_1 \quad \eta_2 = \xi_2 \ldots\ldots \eta_m = \xi_m$$

$$\xi_{m+j} = \sum \xi_k \frac{\partial y_{m+j}}{\partial x_k} \,,$$

le quali ultime si scrivono $X \Omega_j = 0$ e confermano il teorema superiore – È notevole poi che la (7) diventa semplicemente

$$Uf = \sum_k^{1\ldots m} \xi_k (x_1 x_2 \ldots x_m, y_{m+1} \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} \,,$$

onde la regola semplice

Se la varietà V_m, definita dalle formole

$$x_{m+j} = \varphi_{m+j}(x_1\, x_2 \ldots x_m)$$

$$j = 1, 2 \ldots\ldots, n-m$$

è invariante rispetto al gruppo G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \,,$$

l'espressione della trasformazione infinitesima Uf del gruppo G_1, come operante sulla varietà V_m, si ottiene semplicemente sopprimendo in Xf i termini in $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \ldots \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e ponendo nelle espressioni delle rimanenti ξ al posto di $x_{m+1} \ldots x_n$ le loro espressioni per $x_1 \, x_2 \ldots x_m$

§ 15
Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_r

Affinchè una varietà V_m ammetta un gruppo G_r è evidentemente necessario e sufficiente che ne ammetta le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Considerando il gruppo G_r come operante sui punti di V_m, esso darà luogo ad un gruppo Γ il numero dei cui parametri non può eccedere manifestamente r ma che può essere minore (fino anche a ridursi a zero) e ciò avverrà quando esista un sottogruppo di G_r che lasci fisso ciascun punto della varietà V_m (cf. § 2) - Per decidere quanti parametri ha il gruppo Γ, basta applicare i risultati del § precedente e calcolare le corrispondenti trasformazioni infinitesime $U_k \Phi$ di Γ.

Supposte le equazioni della varietà V_m date sotto la forma

$$x_i = \varphi_i(u_1\ u_2 \dots\dots u_m),$$

avremo

$$(8)\qquad U_k \Phi = \sum_i^{1\dots m} \eta_{ki} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

le η_{kl} dovendo calcolarsi per mezzo delle ξ_{ki} dalle (5) cioè

da

$$(9) \qquad \xi_{ki} = \sum_{l}^{1\dots m} \eta_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial u_l}$$

Allora se avverrà che fra le r trasformazioni infinitesime $U_1 f$, $U_2 f$ .... $U_r f$ se ne siano $s < r$ indipendenti, il gruppo Γ avrà precisamente r parametri –

Fra le varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_r hanno particolare importanza le varietà minime invarianti a cui arriviamo colle considerazioni seguenti – Diciamo per brevità equivalenti due punti dello spazio rispetto a G_r se si passa dall'uno all'altro con una trasformazione del gruppo – Evidentemente due punti equivalenti ad uno stesso sono anche equivalenti fra loro – Se P è un punto di una varietà V invariante anche tutti i punti equivalenti a P sono in V – D'altra parte è evidente che la varietà costituita da tutti i punti equivalenti ad uno dato P è una varietà V invariante. Questa è evidentemente la minima varietà invariante contenente P, poichè ogni altra varietà invariante che contenga P contiene necessariamente tutta V –

La ricerca fondamentale relativa alle varietà invarianti di un gruppo è quella delle sue varietà minime; ogni altra varietà invariante si otterrà associando un numero finito o infinito di varietà minime invarianti secondo una data legge –

Intanto osserviamo che quando siano note le equazioni in termini finiti del gruppo G_r

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n\, ; a_1\, a_2 \dots a_r)$$

è ben facile trovare la varietà minima invariante relativa ad un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ - Basta perciò porre nelle f_i al posto delle x_i le $x_i^{(0)}$ e le formule

$$x_i' = f_i(x_1^{(0)}\, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)}; a_1 \dots a_r)$$

facendo variare liberamente i parametri a daranno la richiesta varietà minima invariante contenente P_0.

La dimensione di questa varietà minima è naturalmente al massimo $= r$; in generale è data dalla caratteristica ϱ della matrice:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & \frac{\partial f_2}{\partial a_r} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_r} \end{Vmatrix}$$

ove le x_i sono fatte $= x_i^{(0)}$

§ 46

Dimensione della varietà minima invariante

Se si tratta solo di calcolare il numero ϱ delle dimensioni della varietà minima invariante contenente

$x_i^{(0)}$ alla matrice precedente si può sostituire l'altra

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \xi_{12}(x^0) & \dots & \xi_{1n}(x^0) \\ \xi_{21}(x^0) & \xi_{22}(x^0) & \dots & \xi_{2n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x^0) & \xi_{r2}(x^0) & \dots & \xi_{rn}(x^0) \end{Vmatrix}$$

formata coi coefficienti delle r trasformazioni infinitesime del gruppo. Poiché infatti avendosi, in virtù del le equazioni differenziali fondamentali del gruppo (A). (B) §§ 7, 8:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{\lambda}^{1\dots r} \xi_{\lambda i}(x^0)\psi_{\lambda k}(a),$$

come inversamente

$$\xi_{ji}(x^0) = \sum_{k}^{1\dots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

le due matrici hanno evidentemente la medesima caratteristica. – Ne deduciamo la regola importante:

Date le trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

generatrici di un gruppo G_r, il numero s delle dimensioni della varietà minima invariante contenente un punto $P_0 \equiv x_i^{(0)}$ eguaglia la caratteristica della matrice

$$\| \xi_{k1}(x^0) \quad \xi_{k2}(x^0) \dots \xi_{kn}(x^0) \| \qquad k = 1, 2 \dots r$$

Alla medesima conclusione si arriva anche osservando che se s è la caratteristica di quest'ultima matrice, le trasformazioni infinitesime del gruppo

$$X_1 f, \; X_2 f \dots X_r f$$

stanno in P_0 precisamente s direzioni indipendenti per le loro traiettorie (§ 43) – Queste essendo tangenti alla varietà minima invariante V, la V ha almeno s dimensioni; d'altra parte non ne può avere di più, perchè tutte le direzioni uscenti da P_0 in V sono date dalle traiettorie dei gruppi ad un parametro che formano G_r –

È utile confrontare il significato ora stabilito per la caratteristica s della matrice

$$\left\| \xi_{k1}(x^0) \quad \xi_{k2}(x^0) \ldots\ldots \xi_{kn}(x^0) \right\|$$

$$k = 1, 2, \ldots, r$$

con quello trovato al § 40, ove la caratteristica stessa fu indicata con r_0; si vide allora che il sottogruppo di G_r che lascia fisso P_0 ha precisamente $r-s$ parametri.

Si può spiegare a priori questa relazione mediante considerazioni che servono inversamente a dimostrare nuovamente il risultato stesso.

Siano T, T' due trasformazioni di G_r che trasportano P_0 in uno stesso punto P; la trasformazione $T'T^{-1}$ lascia fisso P_0 ed appartiene quindi al sottogruppo Γ che lascia fisso P_0. Perciò se indichiamo con γ le trasformazioni di Γ, avremo

$$T'T^{-1} = \gamma$$

o

$$T' = \gamma T$$

Dunque se T è una trasformazione fissa di

G_r che trasporta P_0 in P, tutte le altre T si otterranno da $T' = \gamma T$ facendo percorrere a γ tutte le trasformazioni di Γ. Se indichiamo con m il numero dei parametri di Γ, la γ percorre ∞^m trasformazioni e la T ne percorre ∞^s, indicando con s la dimensione della varietà minima invariante contenente P_0. Per ciò si ha precisamente

$$m+s=r\ ,\quad m=r-s\ ^{(*)}$$

§. 47
Determinazione di tutte le varietà minime invarianti.

Una varietà V è invariante rispetto ad un gruppo se insieme ad ogni suo punto P la V contiene anche tutti i punti equivalenti a P. Ora osserviamo che se P, P' sono due punti equivalenti e Γ è il sottogruppo di G che lascia P stazionario, mentre T è una determinata trasformazione che trasporta P in P', sarà

(* Il dubbio che potesse aversi $r < m+s$ si elimina subito osservando che due trasformazioni γT sono diverse se non sono identiche le coordinate dei due punti in cui le corrispondenti T trasportano P_0, ed anche se essendo le stesse queste coordinate, sono diverse le corrispondenti γ.

$$\Gamma' = T^{-1}\Gamma T$$

il sottogruppo che lascia stazionario P', cioè: il sottogruppo stazionario di P' è il trasformato del sottogruppo stazionario di P per mezzo di una trasformazione T di G che trasporti P in P'.

In particolare i due sottogruppi Γ, Γ' hanno lo stesso numero di parametri, ossia: due punti equivalenti ammettono lo stesso numero di trasformazioni infinitesime del gruppo.

Di qui e dalle osservazioni precedenti risulta:
La totalità dei punti che ammettono precisamente ∞^m trasformazioni G_r forma una varietà invariante rispetto al gruppo.

I punti in questione rendono la caratteristica della matrice

$$\left\| \xi_{k1}(x) \quad \xi_{k2}(x) \; \cdots\cdots \; \xi_{kn}(x) \right\|$$

precisamente uguale a $r-m$. Formano quindi una varietà invariante (composta di varietà della specie ora considerata) tutti i punti dello spazio pei quali la caratteristica della matrice superiore è $\leqq r-m$.

Segue quindi l'importante teorema:
Se si eguagliano a zero tutti i minori di un dato ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x) \end{matrix} \right\|$$

supposto che vi siano effettivamente dei valori delle x che soddisfano a tutte queste equazioni, la varietà da queste rappresentata è sempre una varietà invariante rispetto al gruppo.

Ciò premesso, ecco come si può procedere per determinare tutte le varietà minime invarianti rispetto al gruppo. Si cominci dal calcolare in un punto generico la caratteristica della solita matrice, e sia $= q$. Allora ogni varietà minima invariante sarà di dimensione $= q$ per punti generici e potrà essere di dimensione $< q$ per punti speciali. Diremo le prime varietà di prima classe, le altre di seconda classe. Le varietà di prima classe, cioè di dimensione q, esistono naturalmente soltanto quando $q < n$ perchè se $q = n$ una tale varietà riempie lo spazio S_n od una sua regione (caso della transitività v. § seg.te)

Per determinarle supposto dunque $q < n$ basta osservare che le r equazioni lineari

$$X_1 f = 0\ ,\ X_2 f = 0\ \ldots\ldots X_r f = 0$$

formano un sistema completo di $q < n$ equazioni e perciò ammettono precisamente $n-q$ soluzioni indipendenti che indichiamo con

$$\Phi_1\ ,\ \Phi_2\ \ldots\ldots \Phi_{n-q}$$

Ciascuna di queste è un invariante (§ 42) rispetto a ciascuno degli r gruppi ad un parametro $X_i f$,

$X_2 f \ldots\ldots X_r f$ e perciò anche rispetto a G_r - Dunque se in un punto della cercata varietà minima invariante V_q le $\Phi_1, \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$ hanno i valori $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{n-q}$, conserveranno i medesimi valori - Le equazioni

(10) $\Phi_1 = a_1 \quad \Phi_2 = a_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \Phi_{n-q} = a_{n-q}$

rappresentano dunque una varietà di dimensione q che coincide, almeno in una certa estensione, colla varietà cercata. Lo spazio resta così diviso in ∞^{n-q} varietà minime invarianti di dimensione q.

Passiamo ora alle varietà di seconda classe. Supposta una tale varietà V_p di dimensione $p<q$ dovranno nei suoi punti annullarsi tutti i minori d'ordine $p+1$, e non tutti quelli d'ordine p. Eguagliamo dunque a zero tutti i minori d'ordine $p+1$ e siano $\Delta_1, \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_\rho$; se le equazioni

(11) $\Delta_1 = 0 \;,\; \Delta_2 = 0 \;\ldots\ldots\; \Delta_\rho = 0$

sono compatibili e non hanno per conseguenza l'annullarsi anche dei minori d'ordine p, esisteranno le varietà cercate e saranno contenute nella varietà (11) che è per sè stessa (a causa dell'ultimo teorema) una varietà invariante W.

Questa varietà W potrà del resto scindersi in più varietà irriducibili anche di diversa dimensione che saranno evidentemente singole varietà invarianti - Se prendiamo una di esse V di dimen-

sione $s=p$ essa coincide senz'altro con una delle cercate varietà minime V_p - Quando sia invece $s>p$ la detta varietà V si scinderà in ∞^{s-p} varietà minime invarianti di dimensione p. Per trovare queste basterà evidentemente considerare il gruppo G_r come agente sui punti di V e procedere come nel primo caso per scindere lo spazio in ∞^{n-q} varietà invarianti di prima classe - Converrà cioè calcolare, secondo il § 45, le trasformazioni infinitesime

$$U_k \Phi$$

del gruppo indotto sui punti di V ed integrare quindi il sistema completo

$$U_1\Phi=0\,,\ U_2\Phi=0\ \ \dots\dots\ U_r\Phi=0$$

che si ridurrà a p equazioni indipendenti sopra s variabili -

Osserviamo in fine che se V_s è una varietà invariante qualunque (non minima), essa dovrà contenere tutte le minime varietà invarianti relative ad ogni suo punto - Per ciò se supponiamo che in ogni punto di V_s la caratteristica della solita matrice (ξ_{ik}) conservi il suo valore generico q, sarà $s>q$ e la V_s si scinderà in ∞^{s-r} varietà minime di prima classe V_q. Le sue equazioni si otterranno dunque stabilendo nelle (10) fra le costanti a $n-s$ relazioni -

Abbiamo dunque il teorema:

Le equazioni di ogni varietà V_s invariante rispetto ad un gruppo, quando nei punti di V_s la matrice $|\xi_{ik}|$ conserva la sua caratteristica generica q, si ottengono stabilendo $n-s$ relazioni fra gli invarianti del gruppo.

§. 48

Gruppi transitivi

Le considerazioni svolte nei §§ precedenti si applicano ad una importante distinzione dei gruppi in due classi, dei gruppi transitivi e dei gruppi intransitivi.

Un gruppo dicesi transitivo se da un punto generico P dello spazio si può passare, con trasformazioni del gruppo, ad un altro punto qualunque dello spazio od almeno a tutti quelli di un conveniente intorno ad n dimensioni di P. In caso contrario il gruppo dicesi intransitivo. Così il gruppo totale G_6 dei movimenti dello spazio è transitivo; è invece intransitivo quello G_3 delle rotazioni attorno ad un punto.

Quando sono date le equazioni finite del gruppo

$$(12) \qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\, a_1\, a_2 \dots a_r)$$

si decide subito se il gruppo è transitivo; è necessario per ciò e basta che fissate le x si possa

ed inversamente ogni tale soluzione è un invariante (§ 42) - Per ciò se il numero q delle equazioni indipendenti di questo sistema completo, ossia la caratteristica della matrice

$$\| \xi_{k1} \; \xi_{k2} \ldots \xi_{kn} \| \quad k = 1, 2, \ldots r,$$

eguaglia il numero n delle variabili non esistono invarianti - Quando invece $q < n$ vi sono $n-q$ invarianti indipendenti, le soluzioni del sistema completo sopra considerato - Per quanto si è visto al § precedente possiamo dunque dire:

Un gruppo transitivo non possiede invarianti; un gruppo intransitivo $G_r = (X_1 f, X_2 f \ldots X_r f)$ ha per invarianti tutte e sole le soluzioni del sistema completo

$$(13) \qquad X_1 f = 0 \quad X_2 f = 0 \; \ldots \ldots X_r f = 0$$

Indicando come al § 47 con $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_{n-q}$ le soluzioni indipendenti del sistema (13), fra le coordinate $x_1 x_2 \ldots x_n$; $x'_1 x'_2 \ldots x'_n$ di due punti equivalenti rispetto al gruppo passano le $n-q$ relazioni

$$(14) \begin{cases} \Phi_1(x'_1 x'_2 \ldots x'_n) = \Phi_1(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ \Phi_2(x'_1 x'_2 \ldots x'_n) = \Phi_2(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n-q}(x'_1 x'_2 \ldots x'_n) = \Phi_{n-q}(x_1 x_2 \ldots x_n) \end{cases}$$

Se in queste pensiamo p. e. fisse le x' e variabili le x, abbiamo (§ 47) le equazioni della varietà minima invariante relativa al punto x' - È chiaro che sui punti di una tale varietà il gruppo G_r agisce

transitivamente e perciò le (14) ci danno in sostanza le condizioni perchè due punti (x_i), (x'_i) siano equivalenti.

Il calcolo degli invarianti di un gruppo (intransitivo), di cui siano note soltanto le trasformazioni infinitesime, richiede, come si è visto, l'integrazione del sistema completo (13). Ma è facile vedere che se di un gruppo intransitivo G_r si conoscono le equazioni in termini finiti, bastano operazioni algebriche di eliminazione per calcolarne gli invarianti.

E infatti note le equazioni (12) in termini finiti ed essendo la caratteristica della matrice funzionale

$$\frac{\partial(f_1 f_2 \dots f_n)}{\partial(a_1 a_2 \dots a_r)}$$

precisamente eguale a $q < n$ (§ 4 ...), rispetto ad $a_1 a_2 \dots \dots a_r$ le f sono in numero di q sole indipendenti, cioè fra le x' e le x hanno luogo precisamente $n-q$ relazioni che si trovano eliminando fra le (12) i parametri $\underline{a}$. Poniamo che questa eliminazione dia le $n-q$ relazioni indipendenti fra le x e le x'

$$W_1(x_1 x_2 \dots x_n ; x'_1 x'_2 \dots x'_n) = 0 \dots\dots W_{n-q}(x_1 \dots x_n ; x'_1 \dots x'_n) = 0$$

Risolvendo queste rispetto ad $n-q$ delle x' poniamo rispetto a $x'_1\, x'_2 \dots\dots x'_{n-q}$, avremo

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x_1\, x_2 \dots x_n ; x'_{n-q+1} \dots x'_n) \\ x'_2 = \varphi_2(x_1\, x_2 \dots x_n ; x'_{n-q+1} \dots x'_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{n-q} = \varphi_{n-q}(x_1\, x_2 \dots x_n ; x'_{n-q+1} \dots x'_n) \end{cases}$$

Ora queste non possono essere, sotto altra forma, che le relazioni (14) e per ciò nei secondi membri le $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ non possono figurare che nelle combinazioni

$$\Phi_1(x)\ ,\ \Phi_2(x) \ldots\ldots\ldots \Phi_{n-q}(x)$$

Ne risulta che basta nelle funzioni $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ porre per $x'_{n-q+1} \ldots\ldots x'_n$ altrettante costanti arbitrarie per dedurne $n-q$ invarianti indipendenti del gruppo.

§ 50
Esempî varii

Prima di procedere ad ulteriori distinzioni fra i gruppi sarà bene illustrare con esempî particolari le proprietà fin qui studiate nel capitolo.

1°) Come primo esempio prendiamo il gruppo G_6 dei movimenti dello spazio euclideo (cf. § 41). La matrice dell. ξ è qui

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & -x & 0 \\ 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \end{vmatrix}$$

ed è di caratteristica $= 3$, onde il gruppo è transitivo. Questa caratteristica non s'abbassa in nessun punto dello spazio, per cui non vi è alcuna varietà invariante

o se si vuole, ve n'è una sola costituita da tutto lo spazio —

Si consideri il sottogruppo G_3 delle rotazioni generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

La matrice (determinante) delle ξ è

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

ed ha la caratteristica generica $= 2$ e si abbassa soltanto nell'origine $x = y = z = 0$, ove si annullano tutti gli elementi. Il gruppo è intransitivo ed ha l'invariante $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$, soluzione comune di

$$X_1\Phi = 0, \quad X_2\Phi = 0, \quad X_3\Phi = 0;$$

ciascun punto si muove sulla varietà

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{cost}^e$$

cioè sopra una sfera col centro nell'origine -

Se riferiamo i punti di una tale sfera p. e. della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ alle coordinate geografiche $u_1\ u_2$ ponendo

$$x = \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 \qquad y = \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 \qquad z = \cos u_1$$

e calcoliamo secondo il § 45 le trasformazioni infinitesime $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ del gruppo indotto sui punti della sfera troviamo

$$\ldots = \operatorname{sen} u_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \cot u_1 \cos u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

$$\ldots = \cos u_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} - \cot u_1 \operatorname{sen} u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial u_3}$$

... sono indipendenti e generano il G_3 di movi-[menti della] sfera in sè —

Si considerino le 5 trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x X_2 f \ , \ X_4 f = y X_2 f \ , \ X_5 f = z X_2 f \ ;$$

esse generano un gruppo (proiettivo) G_5 perchè si ha:

$$(X_1 X_2) = 0 \ , \ (X_1 X_3) = X_4 \ , \ (X_1 X_4) = -X_3 \ , \ (X_1 X_5) = 0$$

$$(X_2 X_3) = X_3 \ , \ (X_2 X_4) = X_4 \ , \ (X_2 X_5) = X_5 \ , \ (X_3 X_4) = 0$$

$$(X_3 X_5) = 0 \ , \ (X_4 X_5) = 0$$

La caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} -y & x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{Vmatrix}$$

è = 2. Il gruppo è quindi intransitivo ed ha un unico invariante, la soluzione del sistema

$$X_1 f = 0 \ , \ X_2 f = 0$$

che è $\frac{x^2+y^2}{z^2}$; dunque le varietà (minime) invarianti

di prima classe sono i coni

$$x^2+y^2=Cz^2$$

di rotazione attorno all'asse z. Le altre varietà invarianti (di seconda classe) si ottengono eguagliando in primo luogo a zero i minori di 2° ordine, ciò che dà o la soluzione

$$x=0 \qquad y=0$$

ossia l'asse delle z, o l'altra

$$x^2+y^2=0\ ,\ z=0$$

ossia le rette cicliche per l'origine nel piano xy - Queste sono tre varietà V_1 invarianti. In fine per $x=0, y=0, z=0$ si annullano tutti gli elementi della matrice, onde un unica varietà invariante V_0 costituita dall'origine -

Se si vogliono le trasformazioni infinitesime $U f$ del gruppo G_7 come agente sui punti di uno dei detti coni p. e. del cono

$$x^2+y^2=z^2$$

si potrà porre

$$x=u_1 \operatorname{sen} u_2\ ,\quad y=u_1 \cos u_2 \quad z=u_1$$

ed applicando la formola del § 45 si trova subito

$$U_1 f=\frac{\partial f}{\partial u_2}\ ,\quad U_2 f=u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,\quad U_3 f=u_1^2\cos u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,$$

$$U_4 f=u_1^2 \operatorname{sen} u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,\quad U_5 f=u_1^2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ .$$

Per i punti dell'asse delle z, che è pure una varietà invariante; le trasformazioni del gruppo si ridu-

cono a

$$Z_1 f = 0 \ , \ Z_2 f = z\frac{\partial f}{\partial z} \quad Z_3 f = 0 \quad Z_4 f = 0 \quad Z_5 f = z^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

cioè alle due sole distinte $Z_2 f$, $Z_5 f$ ed il gruppo indotto ha qui soltanto due parametri.

§. 51
Gruppi imprimitivi

Si è visto (§§ 47-49) che un gruppo G_r intransitivo nello spazio S_n scinde questo spazio in ∞^{n-q} varietà (invarianti)

(15) $\Phi_1(x) = C_1 \ , \ \Phi_2(x) = C_2 \ \ldots\ldots\ldots \ \Phi_{n-q}(x) = C_{n-q}$,

di dimensione $= q$, tali che ogni punto dello spazio si muove (transitivamente) per le trasformazioni di G_r entro la varietà (15) cui appartiene. Ora può darsi che anche per un gruppo transitivo sia possibile scindere lo spazio in ∞^{n-q} varietà V_q, di dimensione q, in guisa che le trasformazioni del gruppo o lascino ciascuna varietà V_q in sè stessa o scambino queste varietà di fra loro.

Un gruppo che ammetta una tale divisione dello spazio dicesi imprimitivo. Lie riguarda l'intransitività come un caso particolare dell'imprimitività, per cui un gruppo intransitivo è sempre imprimitivo.

Se poi la divisione dello spazio è impossibile il gruppo dicesi primitivo, ogni gruppo primitivo è quindi di necessità transitivo.

Notiamo subito che un gruppo imprimitivo può talora consentire non una sola divisione dello spazio in sistemi (varietà) d'imprimitività ma anche più tali divisioni e persino un numero infinito.

Per es. se consideriamo il gruppo G_3 delle traslazioni nello spazio, generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

esso è transitivo ed imprimitivo perchè un sistema qualunque di piani paralleli dà una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività. - Come si vede, qui il numero delle divisioni è infinito. - Ancora se al gruppo G_3 delle rotazioni attorno all'origine associamo il gruppo G_1 delle omotetie col centro nell'origine, abbiamo evidentemente un gruppo G_4 che ha per trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Questo gruppo transitivo è evidentemente imprimitivo; la divisione cercata dello spazio effettuandosi mediante le sfere col centro nell'origine. -

Domandiamoci ora in generale: A quali criteri si può riconoscere se un dato gruppo transitivo G_r è imprimitivo?

Perchè ciò accada, bisogna che sia possibile

una divisione (15) dello spazio. Ora le $n-q$ funzioni indipendenti $\Phi_1 \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$ possono riguardarsi come le soluzioni di un conveniente sistema completo di q equazioni

$$(16) \quad A_1 f = 0 \quad A_2 f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_q f = 0,$$

che è perfettamente determinato dalle funzioni Φ ed inversamente le determina –(*) La questione viene così ridotta a trovare quali relazioni deve avere il sistema completo (16) col gruppo. Ora eseguendo una tale trasformazione

$$x_i' = f_i(x_1\ x_2 \ldots x_n;\ a_1\ a_2 \ldots a_r)$$

sopra una varietà (15), essa deve trasformarsi in una altra tale varietà dove soltanto i valori delle C sa-

(*) È ben noto come si forma il sistema completo in discorso. – Poichè le Φ sono indipendenti, uno almeno dei determinanti funzionali delle Φ rispetto ad $n-q$ delle x è diverso da zero, poniamo per es. che sia

$$\frac{\partial(\Phi_1 . \Phi_2 \ldots \Phi_{n-q})}{\partial(x_1\ x_2 \ldots x_{n-q})} \neq 0$$

Allora basta porre

$$A_i f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+i}} & \frac{\partial f}{\partial x_{n-q}} & \ldots\ldots & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q+i}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q+i}} & \frac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

$i = 1, 2, \ldots q$

ranno cangiate in C' (funzioni delle C e dei parametri a) - Bisogna dunque che si equivalgano i due sistemi

$$\Phi_i (f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_n(x,a)) = C_i$$

$$\Phi_i (x_1, x_2 \dots \dots x_n) = C'_i$$

per la qual cosa è necessario e sufficiente che le funzioni

$$\Phi_i (x'_1 x'_2 \dots \dots x'_n) \qquad i = 1, 2 \dots \dots n$$

siano funzioni di $\Phi_1, \Phi_2 \dots \dots \Phi_{n-q}$ e perciò ancora soluzioni del sistema completo (16) - Se diciamo dunque che un sistema completo (16) ammette una trasformazione

$$S) \qquad x'_i = \psi_i (x_1 x_2 \dots x_n)$$

quando ogni soluzione del sistema, applicandovi la trasformazione S, si cangia in una nuova soluzione, possiamo dire che il sistema completo (16) deve ammettere tutte le trasformazioni del gruppo G_r - Viceversa, se questo accade, eguagliando $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema ad altrettante costanti arbitrarie otterremo una divisione dello spazio in varietà di imprimitività - Concludiamo che: Un gruppo transitivo è imprimitivo quando è possibile costruire dei sistemi completi che ammettano il gruppo (tutte le trasformazioni del gruppo) -

§ . 52.

Sistemi completi che ammettono un gruppo

Ritorneremo più tardi sulla questione di trovare (se esistono) i sistemi completi che ammettono un dato gruppo G_r — Per ora ci limitiamo a stabilire i criteri per riconoscere se un sistema completo dato (16) ammette un gruppo G_r.

Prendiamo in primo luogo un gruppo G_1 di cui sia Xf la trasformazione infinitesima generatrice. Se il sistema (16) ammette il gruppo G_1, presa una qualunque sua soluzione $\varphi_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$ e supposto che siano

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, t)$$

le equazioni finite di G_1, anche $\varphi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$ dovrà essere una soluzione.

Prese dunque $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema (16)

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_{n-q}$$

dovranno le $\varphi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$ essere funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_{n-q}$ (e di t) — Ora sviluppando in serie di potenze di t si ha

$$\varphi_i(x') = \varphi_i + t X\varphi_i + \frac{t^2}{1.2} X^2\varphi_i + \ldots\ldots,$$

e siccome la proprietà precedente deve aver luogo

per tutti i valori di t, ne segue in particolare che

$$X\varphi_1 \quad X\varphi_2 \ldots\ldots X\varphi_{n-q}$$

debbono essere altrettante funzioni di $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q}$.
Viceversa se ciò accade, anche

$$X^2\varphi_i \; , X^3\varphi_i \ldots\ldots$$

sono funzioni delle φ e però il sistema (16) ammette il gruppo G_1 (*). Dunque perchè il sistema completo (16) ammetta il gruppo Xf, è necessario e sufficiente che l'operazione X applicata ad una soluzione qualunque del sistema dia una nuova soluzione.

L'applicazione di questo criterio richiede l'integrazione del sistema completo, ma si può facilmente trasformare il criterio in un altro pel quale ciò non sia più necessario. Basta per ciò osservare che l'espressione alternata

$$(A_k X) = A_k(Xf) - X(A_k f) \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots q$$

si annulla per $f = \varphi_1\, ,\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ perchè $A_k\varphi_i = 0$ e $X\varphi_i$ è nuovamente una soluzione. Dunque l'equazione

$$(A_k X) = 0$$

è una conseguenza delle (16) e per ciò l'espressione alternata $(A_k X)$ deve essere una combinazione lineare, a coefficienti in generale variabili, di

---

(*) Essendo $X\varphi_i = F(\varphi_1\, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q})$ si ha

$$X^2\varphi_i = \sum_k^{1\ldots n-q} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} X\varphi_k \text{, etc.} \ldots$$

Ora queste non possono essere, sotto altra forma, che le relazioni (14) e per ciò nei secondi membri le $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ non possono figurare che nelle combinazioni

$$\varphi_1(x)\ ,\ \varphi_2(x) \ldots\ldots\ldots \varphi_{n-q}(x)$$

Ne risulta che basta nelle funzioni $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ porre per $x'_{n-q+1} \ldots\ldots x'_n$ altrettante costanti arbitrarie per dedurne $n-q$ invarianti indipendenti del gruppo.

§. 50
Esempî varii

Prima di procedere ad ulteriori distinzioni fra i gruppi sarà bene illustrare con esempî particolari le proprietà fin qui studiate nel capitolo.

1°) Come primo esempio prendiamo il gruppo G_6 dei movimenti dello spazio euclideo (cf. § 41). La matrice delle ξ è qui

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & -x & 0 \\ 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \end{vmatrix}$$

ed è di caratteristica $= 3$, onde il gruppo è transitivo. Questa caratteristica non s'abbassa in nessun punto dello spazio, per cui non vi è alcuna varietà invariante

o se si vuole, ve n'è una sola costituita da tutto lo spazio —

Si consideri il sottogruppo G_3 delle rotazioni generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

La matrice (determinante) delle ξ è

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

ed ha la caratteristica generica $= 2$ e si abbassa soltanto nell'origine $x = y = z = 0$, ove si annullano tutti gli elementi. Il gruppo è intransitivo ed ha l'invariante $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$, soluzione comune di

$$X_1 \Phi = 0, \quad X_2 \Phi = 0, \quad X_3 \Phi = 0;$$

ciascun punto si muove sulla varietà

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{cost}^{e}$$

cioè sopra una sfera col centro nell'origine —

Se riferiamo i punti di una tale sfera p. e. della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ alle coordinate geografiche u_1 u_2 ponendo

$$x = \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 \qquad y = \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 \qquad z = \cos u_1$$

e calcoliamo secondo il § 45 le trasformazioni infinitesime $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ del gruppo indotto sui punti della sfera troviamo

$$\begin{cases} U_1 f = \operatorname{sen} u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \cot u_1 \cos u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \\ U_2 f = \cos u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_1} - \cot u_1 \operatorname{sen} u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \\ U_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial u_3} \end{cases}$$

Queste sono indipendenti e generano il G_3 di movimenti della sfera in sè –

2°) Si considerino le 5 trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\ , \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x X_2 f\ , \quad X_4 f = y X_2 f\ , \quad X_5 f = z X_2 f\ ;$$

esse generano un gruppo (proiettivo) G_5 perchè si ha:

$$(X_1 X_2) = 0\ , \quad (X_1 X_3) = X_4\ , \quad (X_1 X_4) = -X_3\ , \quad (X_1 X_5) = 0$$

$$(X_2 X_3) = X_3\ , \quad (X_2 X_4) = X_4\ , \quad (X_2 X_5) = X_5\ , \quad (X_3 X_4) = 0$$

$$(X_3 X_5) = 0\ , \quad (X_4 X_5) = 0$$

La caratteristica della matrice

$$\left\| \begin{matrix} -y & x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{matrix} \right\|$$

è $= 2$. Il gruppo è quindi intransitivo ed ha un unico invariante, la soluzione del sistema

$$X_1 f = 0\ , \quad X_2 f = 0$$

che è $\frac{x^2+y^2}{z^2}$; dunque le varietà (minime) invarianti

di prima classe sono i coni

$$x^2+y^2=cz^2$$

di rotazione attorno all'asse z. Le altre varietà invarianti (di seconda classe) si ottengono eguagliando in primo luogo a zero i minori di 2° ordine, ciò che dà o la soluzione

$$x=0 \qquad y=0$$

ossia l'asse delle z, o l'altra

$$x^2+y^2=0\ ,\ z=0$$

ossia le rette cicliche per l'origine nel piano xy – Queste sono tre varietà V_1 invarianti. In fine per $x=0$, $y=0$, $z=0$ si annullano tutti gli elementi della matrice, onde un unica varietà invariante V_0 costituita dall'origine –

Se si vogliono le trasformazioni infinitesime Uf del gruppo G come agente sui punti di uno dei detti coni p. e. del cono

$$x^2+y^2=z^2$$

si potrà porre

$$x=u_1 \operatorname{sen} u_2 \quad , \quad y=u_1\cos u_2 \quad \cdot \quad z=u_1$$

ed applicando la formola del § 45 si trova subito

$$U_1f=\frac{\partial f}{\partial u_2}\ ,\quad U_2f=u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,\quad U_3f=u_1^2\cos u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,$$

$$U_4f=u_1^2\operatorname{sen} u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ ,\quad U_5f=u_1^2\frac{\partial f}{\partial u_1}\ .$$

Per i punti dell'asse delle z, che è pure una varietà invariante; le trasformazioni del gruppo si ridu–

cono a

$$Z_1 f = 0\ ,\ Z_2 f = z\frac{\partial f}{\partial z}\quad Z_3 f = 0\quad Z_4 f = 0\quad Z_5 f = z^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

cioè alle due sole distinte $Z_2 f$, $Z_5 f$ ed il gruppo indotto ha qui soltanto due parametri.

§ 51
Gruppi imprimitivi

Si è visto (§§ 47-49) che un gruppo G_r intransitivo nello spazio S_n scinde questo spazio in ∞^{n-q} varietà (invarianti)

(15) $\Phi_1(x) = C_1\ ,\ \Phi_2(x) = C_2\ \ldots\ldots\ \Phi_{n-q}(x) = C_{n-q}$,

di dimensione $= q$, tali che ogni punto dello spazio si muove (transitivamente) per le trasformazioni di G_r entro la varietà (15) cui appartiene. Ora può darsi che anche per un gruppo transitivo sia possibile scindere lo spazio in ∞^{n-q} varietà V_q, di dimensione q, in guisa che le trasformazioni del gruppo o lascino ciascuna varietà V_q in sè stessa o scambino queste varietà di fra loro.

Un gruppo che ammetta una tale divisione dello spazio dicesi imprimitivo. Lie riguarda l'intransitività come un caso particolare dell'imprimitività, per cui un gruppo intransitivo è sempre imprimitivo.

Se poi la divisione dello spazio è impossibile il gruppo dicesi primitivo, ogni gruppo primitivo è quindi di necessità transitivo.

Notiamo subito che un gruppo imprimitivo può talora consentire non una sola divisione dello spazio in sistemi (varietà) d'imprimitività ma anche più tali divisioni e persino un numero infinito.

Per es. se consideriamo il gruppo G_3 delle traslazioni nello spazio, generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}\ ,$$

esso è transitivo ed imprimitivo perchè un sistema qualunque di piani paralleli dà una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività. - Come si vede, qui il numero delle divisioni è infinito. - Ancora se al gruppo G_3 delle rotazioni attorno all'origine associamo il gruppo G_1 delle omotetie col centro nell'origine, abbiamo evidentemente un gruppo G_4 che ha per trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Questo gruppo transitivo è evidentemente imprimitivo; la divisione cercata dello spazio effettuandosi mediante le sfere col centro nell'origine. -

Domandiamoci ora in generale: A quali criterî si può riconoscere se un dato gruppo transitivo G_r è imprimitivo?

Perchè ciò accada, bisogna che sia possibile

una divisione (15) dello spazio. Ora le $n-q$ funzioni indipendenti $\Phi_1 \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$ possono riguardarsi come le soluzioni di un conveniente sistema completo di q equazioni

$$(16) \quad A_1 f = 0 \quad A_2 f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_q f = 0,$$

che è perfettamente determinato dalle funzioni Φ ed inversamente le determina — (*) La questione viene così ridotta a trovare quali relazioni deve avere il sistema completo (16) col gruppo. Ora eseguendo una tale trasformazione

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

sopra una varietà (15), essa deve trasformarsi in una altra tale varietà dove soltanto i valori delle C sa-

---

(*) È ben noto come si forma il sistema completo in discorso — Poichè le Φ sono indipendenti, uno almeno dei determinanti funzionali delle Φ rispetto ad $n-q$ delle x è diverso da zero, poniamo per es. che sia

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_{n-q})}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_{n-q})} \neq 0$$

Allora basta porre

$$A_i f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q}} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

$i = 1, 2 \ldots q$

ranno cangiate in C' (funzioni delle C e dei parametri a) - Bisogna dunque che si equivalgano i due sistemi

$$\Phi_i\left(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_n(x,a)\right) = C_i$$

$$\Phi_i(x_1, x_2 \dots x_n) = C'_i$$

per la qual cosa è necessario e sufficiente che le funzioni

$$\Phi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n) \qquad i = 1, 2 \dots n$$

siano funzioni di $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_{n-q}$ e perciò ancora soluzioni del sistema completo (16) - Se diciamo dunque che un sistema completo (16) ammette una trasformazione

$$S) \qquad x'_i = \psi_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

quando ogni soluzione del sistema, applicandovi la trasformazione S, si cangia in una nuova soluzione, possiamo dire che il sistema completo (16) deve ammettere tutte le trasformazioni del gruppo G_r - Viceversa, se questo accade, eguagliando $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema ad altrettante costanti arbitrarie otterremo una divisione dello spazio in varietà di imprimitività - Concludiamo che: Un gruppo transitivo è imprimitivo quando è possibile costruire dei sistemi completi che ammettano il gruppo (tutte le trasformazioni del gruppo) -

§ . 52.

Sistemi completi che ammettono un gruppo

Ritorneremo più tardi sulla questione di trovare (se esistono) i sistemi completi che ammettono un dato gruppo G_r — Per ora ci limitiamo a stabilire i criteri per riconoscere se un sistema completo dato (16) ammette un gruppo G_r.

Prendiamo in primo luogo un gruppo G_1 di cui sia Xf la trasformazione infinitesima generatrice. Se il sistema (16) ammette il gruppo G_1, presa una qualunque sua soluzione $\varphi_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)$ e supposto che siano

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n t)$$

le equazioni finite di G_1, anche $\varphi_i(x_1' x_2' \ldots\ldots x_n')$ dovrà essere una soluzione.

Prese dunque $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema (16)

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_{n-q}$$

dovranno le $\varphi_i(x_1' x_2' \ldots\ldots x_n')$ essere funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_{n-q}$ (e di t) — Ora sviluppando in serie di potenze di t si ha

$$\varphi_i(x') = \varphi_i + tX\varphi_i + \frac{t^2}{1.2} X^2\varphi_i + \ldots\ldots,$$

e siccome la proprietà precedente deve aver luogo

per tutti i valori di t, ne segue in particolare che

$$X\varphi_1 \quad X\varphi_2 \;\ldots\ldots\; X\varphi_{n-q}$$

debbono essere altrettante funzioni di $\varphi_1\,\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$. Viceversa se ciò accade, anche

$$X^2\varphi_i \;,\; X^3\varphi_i \;\ldots\ldots$$

sono funzioni delle φ e però il sistema (16) ammette il gruppo G_1 (*). Dunque perchè il sistema completo (16) ammetta il gruppo Xf, è necessario e sufficiente che l'operazione X applicata ad una soluzione qualunque del sistema dia una nuova soluzione.

L'applicazione di questo criterio richiede l'integrazione del sistema completo, ma si può facilmente trasformare il criterio in un altro pel quale ciò non sia più necessario. Basta per ciò osservare che l'espressione alternata

$$(A_k X) = A_k(Xf) - X(A_k f) \qquad k = 1, 2 \ldots\ldots q$$

si annulla per $f = \varphi_1\,,\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ perchè $A_k\varphi_i = 0$ e $X\varphi_i$ è nuovamente una soluzione. Dunque l'equazione

$$(A_k X) = 0$$

è una conseguenza delle (16) e per ciò l'espressione alternata $(A_k X)$ deve essere una combinazione lineare, a coefficienti in generale variabili, di

---

(*) Essendo $X\varphi_i = F(\varphi_1\,\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q})$ si ha

$$X^2\varphi_i = \sum_k^{1\ldots n-q} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} X\varphi_k \text{ ecc.} \ldots$$

$$A_1 f\,,\ A_2 f \ldots\ldots A_q f$$

Viceversa se ciò accade, se φ è una soluzione qualunque del sistema (16) anche $X\varphi$ è una soluzione, e per ciò una funzione di $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ – Dunque:

Affinchè un sistema completo

$$A_1 f=0\ ,\quad A_2 f=0\ \ldots\ldots A_q f=0$$

ammetta il gruppo G_1 ad un parametro, generato dalla trasformazione infinitesima Xf, è necessario e sufficiente che le espressioni alternate

$$(A_k, X) \qquad k=1,2\ldots q$$

siano combinazioni lineari (a coefficienti in generale variabili) di $A_1 f, A_2 f \ldots\ldots A_q f$ –

Basta ora ricordare che un gruppo $G_r=(X_1 X_2 \ldots X_r)$ non è altro che l'insieme di tutti i gruppi ad un parametro

$$Xf = \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f$$

(colle λ costanti) per dedurne il teorema generale:

Un sistema completo

$$A_1 f=0\ ,\quad A_2 f=0\ \ldots\ldots A_q f=0$$

ammette il gruppo $G_r=(X_1 X_2 \ldots\ldots X_r)$ allora soltanto quando ciascuna delle espressioni alternate

$$(A_k, X_i) \quad \begin{cases} k=1,2\ldots q \\ i=1,2\ldots r \end{cases}$$

si compone linearmente con $A_1 f, A_2 f \ldots\ldots A_q f$

Per es. se prendiamo il gruppo G_3 delle traslazioni

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ed il sistema completo

$$A_1 f = c\frac{\partial \Phi}{\partial x} - a\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

$$A_2 f = c\frac{\partial \Phi}{\partial y} - b\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

con a, b, c costanti, manifestamente le espressioni alternate (A_k, X_i) sono nulle e la condizione è soddisfatta – Dunque eguagliando ad una costante arbitraria la soluzione

$$\Phi = ax + by + cz$$

del sistema completo, si ha una divisione dello spazio (cf. §. 51) – Così pure se prendiamo il secondo esempio di questo paragrafo

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

si ha l'identità

$$xX_1 f + yX_2 f + zX_3 f = 0$$

ed il sistema completo

$$A_1 f = X_1 f = 0 \qquad A_2 f = X_2 f = 0$$

sta nella relazione voluta col gruppo –

La sua soluzione $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$ eguagliata a costante dà la richiesta divisione dello spazio –

§ 53
Gruppi sistatici ed asistatici

Altre importanti distinzioni fra i gruppi si desumono dalle considerazioni seguenti. Un gruppo G_r di trasformazioni dello spazio $S_n = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ può essere così costituito che tutte le trasformazioni di G_r che lasciano fisso un punto generico P dello spazio lascino fissi contemporaneamente tutti i punti di una varietà (continua) contenente P. Il gruppo si dice allora, secondo Lie-Engel, sistatico, altrimenti asistatico. Così ogni gruppo semplicemente transitivo è sistatico perchè se un punto resta fisso, restano fissi anche tutti gli altri punti dello spazio. Così pure è sistatico il gruppo G_3 delle rotazioni attorno ad un punto O perchè se resta fisso un punto P, restano immobili anche tutti i punti della retta OP. Al contrario per es. il gruppo totale di movimenti nel piano o nello spazio è asistatico, il sottogruppo delle rotazioni attorno ad un punto non lasciando fisso alcun altro punto.

Ricerchiamo ora i criterii per decidere, appena date le r trasformazioni generatrici del gruppo

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$k = 1, 2, \ldots r,$$

se il gruppo appartiene alla classe dei gruppi sistatici o a quella degli asistatici -

Indichiamo, come al § 47, con q la caratteristica della matrice:

$$\left\|\begin{matrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \dots\dots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x) & \xi_{22}(x) & \dots\dots & \xi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \dots\dots & \xi_{rn}(x) \end{matrix}\right\| .$$

onde sarà q la dimensione delle varietà minime invarianti di prima classe (§ 47) ed il sottogruppo che lascia P stazionario ha precisamente $r-q$ parametri.

Quando $q = r$, il gruppo è certamente sistatico perchè riducendosi il detto sottogruppo all'identità lascia fissi tutti i punti dello spazio - Supponiamo dunque $q < r$; ciò significa che fra le r espressioni

$$X_1 f \;, X_2 f \dots\dots X_r f$$

ve ne sono precisamente q indipendenti nel senso che non sono legate da alcuna relazione lineare a coefficienti variabili, mentre le rimanenti $r-q$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per quelle q. Senza alterare la generalità possiamo supporre come al § 40

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} \end{vmatrix} \neq 0$$

ed allora

$$X_1 f,\ X_2 f \dots X_q f$$

sono forme lineari nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ indipendenti, mentre le rimanenti si esprimono per queste colle formule

(17) $$X_{q+j} f = \varphi_{j1}(x) X_1 f + \varphi_{j2}(x) X_2 f + \dots\dots + \varphi_{jq}(x) X_q f$$

$$j = 1, 2, \dots r-q,$$

dove le φ_{jl} sono delle funzioni delle x.

Dimostreremo che: Il gruppo G_r è sistatico quando fra le $q(r-q)$ funzioni φ delle x ve ne sono meno di n indipendenti, al contrario asistatico se il numero delle φ indipendenti è precisamente $= n$.

Intanto il caso già esaminato $q = n$ rientra nel criterio ora enunciato perchè allora è zero il numero delle φ ed il gruppo è sistatico.

In generale osserviamo che il sottogruppo di stabilità di un punto generico $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ ha $n-q$ parametri e le sue $n-q$ trasformazioni generatrici sono pel § 40

(18) $$X_{q+j} f - \varphi_{j1}(x^0) X_1 f - \varphi_{j2}(x^0) X_2 f - \dots\dots - \varphi_{jq}(x^0) X_q f$$

$$j = 1, 2, \dots r-q$$

Ora se il numero delle φ indipendenti è $n-\rho$ soltanto, con $\rho > 0$, le equazioni

(19) $$\varphi_{jl}(x_1\, x_2 \dots x_n) = \varphi_{jl}(x_1^0\, x_2^0 \dots x_n^0)$$

sono in numero di $n-\rho$ indipendenti soltanto e definiscono una varietà V_ρ di dimensione ρ. Tutti i pun-

ti di questa varietà ammettono lo stesso sottogruppo di stabilità del punto P_0, poichè se nelle (18) al posto delle $x_i^{(0)}$ si pongono le coordinate $x_i^{(1)}$ di un altro punto qualunque di V_ρ le trasformazioni infinitesime (18) rimangono per le (19) le stesse; il gruppo è dunque sistatico, c.d.d. Di più notiamo che tutti i punti che hanno lo stesso gruppo di stabilità di P_0 appartengono alla varietà V_ρ definita dalle (19). Poichè se $x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)}$ sono le coordinate di un tal punto, le r-q trasformazioni

$$X_{q+j}f - \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{jk}(x^{(1)}) X_k f \quad (j=1,2,\ldots r-q)$$

debbono comporsi linearmente, con coefficienti costanti, colle (18) e ciò esige che si abbia

$$\varphi_{jk}(x^{(1)}) = \varphi_{jk}(x^{(0)}) \quad \begin{cases} j=1,2\ldots r-q \\ k=1,2\ldots q \end{cases}$$

Ogni varietà V_ρ definita dalle (19) può dunque dirsi una varietà sistatica del gruppo perchè consta di tutti e soli i punti che ammettono il medesimo sottogruppo di stabilità -

È manifesto in fine che se $\rho=0$, se cioè le φ_{jk} sono in numero di n indipendenti, il gruppo è asistatico perchè le (19) possono soddisfarsi solo con un numero discreto di valori per le x.

Come esempio, se consideriamo il gruppo G_3 delle rotazioni attorno all'origine, fra

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} \ , \ X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z} \ , \ X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

abbiamo la sola relazione

$$X_3 f = -\frac{x}{z} X_1 f - \frac{y}{z} X_2 f \ ;$$

le funzioni φ sono due soltanto ed il gruppo è quindi sistatico. Le varietà sistatiche hanno le equazioni

$$\frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0} \ , \ \frac{y}{z} = \frac{y_0}{z_0} \ ,$$

cioè sono le rette per l'origine.

§ 54
Imprimitività di un gruppo sistatico

Supponiamo che sia G_r un gruppo sistatico ed indichiamo con

$$\varphi_1 \ \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_{n-\rho}$$

le $n-\rho$ indipendenti fra le funzioni φ, dove $\rho > 0$ e supponiamo dapprima $n-\rho > 0$. Le equazioni

$$\varphi_1(x_1 \, x_2 \ldots\ldots x_n) = c_1 \ , \ \varphi_2(x_1 \, x_2 \ldots\ldots x_n) = c_2 \ldots\ldots \varphi_{n-\rho}(x_1 \ldots\ldots x_n) = c_{n-\rho}$$

danno una divisione dello spazio in $\infty^{n-\rho}$ varietà sistatiche V_ρ ed è facile vedere che essa è altresì una divisione in sistemi d'imprimitività. E infatti se P, Q sono due punti qualunque di una stessa varietà sistatica V_ρ, essi hanno lo stesso sottogruppo di stabilità G_{r-q}; se una trasformazione qualunque T di G_r trasporta P, Q in P', Q', anche P', Q' hanno a comune

il sottogruppo di stabilità nel sottogruppo trasformato

$$T^{-1} G_{r-q} T$$

Dunque P', Q' appartengono ad una medesima varietà sistatica V'_ρ, onde si vede che tutte le trasformazioni di G_r o lasciano singolarmente invariata ciascuna varietà sistatica o scambiano queste varietà fra loro. Le varietà sistatiche costituiscono dunque sistemi d'imprimitività del gruppo.

Se poi si ha $n-\rho=0$, non vi sono funzioni φ e perciò $q=r\leq n$. Se vale il segno di diseguaglianza, il gruppo è intransitivo quindi anche imprimitivo. Se poi $q=r=n$ il gruppo è semplicemente transitivo e dimostreremo più tardi (V. § 93) che un tale gruppo è sempre imprimitivo. Ammettendo per un momento questo teorema, abbiamo il risultato: Ogni gruppo sistatico è necessariamente imprimitivo; le varietà sistatiche danno una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività.

La stessa cosa si può provare, secondo il § 52, dimostrando direttamente che tutte le espressioni

$$X_i \varphi_\nu \begin{cases} i=1,2\ldots r \\ \nu=1,2\ldots n-\rho \end{cases}$$

si esprimono per $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-\rho}$, ciò che segue facilmente dalle formole di composizione del gruppo

$$(X_i, X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$

tenendo conto delle identità (17) - Abbiamo infatti

$$(\alpha)\quad (X_i, X_{q+j}) = \left(X_i, \sum_\lambda^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x).X_\lambda\right) = \sum_s^{1\ldots q} X_i(\varphi_{js}) X_s f + \sum_\lambda^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(X_i, X_\lambda)$$

D'altronde è

$$(X_i, X_\lambda) = \sum_s^{1\ldots r} c_{i\lambda s} X_s f = \sum_s^{1\ldots q}\left\{ c_{i\lambda s} + \sum_\mu^{1\ldots r-q} c_{i\lambda, q+\mu}\, \varphi_{\mu s}\right\} X_s f$$

e similmente

$$(X_i, X_{q+j}) = \sum_s^{1\ldots q}\left\{ c_{i, q+j, s} + \sum_\lambda^{1\ldots r-q} c_{i, q+j, q+\lambda}\, \varphi_{\lambda s}\right\} X_s f$$

e sostituendo nelle (α), la relazione che ne viene fra $X_1 f$, $X_2 f \ldots\ldots X_q f$ deve essere un'identità, onde eguagliando i coefficienti di $X_s f$ da una parte e dall'altra ne risultano le formole:

$$(20)\quad X_i(\varphi_{js}) = c_{i, q+j, s} + \sum_\lambda^{1\ldots r-q} c_{i, q+j, q+\lambda}\, \varphi_{\lambda s} - \sum_\lambda^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}\left\{ c_{i\lambda s} + \sum_\mu^{1\ldots r-q} c_{i\lambda q+\mu}\, \varphi_{\mu s}\right\},$$

che ci dimostrano essere le espressioni

$$X_i(\varphi_{js})$$

funzioni quadratiche delle φ stesse, dipendenti ~~unica~~mente dalle costanti c_{iks} di composizione ~~del gruppo~~.

§ 55

Criterio per la sistaticità del gruppo dedotto dalle equazioni di definizione

Per decidere della sistaticità o meno di un gruppo non occorre conoscere le espressioni delle sue trasformazioni infinitesime, come sopra si è ammesso, ma basta avere le equazioni di definizione del gruppo. — Ecco come procede Lie a tale scopo. Intanto, date le equazioni di definizione, si può subito calcolare la caratteristica generica q della solita matrice e se riesce $q=r$ il gruppo è senz'altro sistatico (§ 53). — Supponiamo dunque $q<r$; allora esistono le $q(r-q)$ funzioni $\varphi_{j\lambda}$ del § 53. — Queste non si conoscono direttamente quando siano date solo le equazioni di definizione, ma si può da queste calcolare un sistema di equazioni ai differenziali totali di cui le $\varphi_{j\lambda}$ sono gli integrali, ed allora si può anche decidere, senza integrare queste equazioni, quante delle φ sono indipendenti.

Se costruiamo le $q(r-q)$ equazioni di differenziali totali

$$(21) \qquad \Omega_{j\lambda} = \sum_{s}^{1 \dots n} \frac{\partial \varphi_{j\lambda}}{\partial x_s} dx_s = 0 \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \dots r-q \\ \lambda = 1, 2, \dots q, \end{cases}$$

di esse gli integrali sono naturalmente le funzioni φ stesse. Ora dalla identità (17) risulta

$$\xi_{q+j,i} = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}\, \xi_{\lambda i}$$

e quindi

$$\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \xi_{\lambda i} \frac{\partial \varphi_{j\lambda}}{\partial x_s} ,$$

onde

$$(22) \quad \sum_{s}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} \right\} dx_s = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \xi_{\lambda i}\, \Omega_{j\lambda}$$

Le equazioni (21) hanno dunque per conseguenza le seguenti

$$(23) \qquad \sum_{s}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} \right\} dx_s = 0 ;$$

Ma viceversa da queste seguono le (21) perchè la matrice $|\xi_{\lambda i}|$ ha la caratteristica q; dunque le (21) e le (23) si equivalgono e le (23) hanno dunque per integrali le funzioni $\varphi_{j\lambda}$ - Naturalmente basta scrivere delle (23) quelle linearmente indipendenti che formano un sistema illimitatamente integrabile -

Il sistema (23) può alla sua volta sostituirsi da un altro equivalente, che si calcola dalle equazioni di definizione del gruppo - Perciò ricerchiamo, per un punto generico $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ le trasformazioni infinitesime del gruppo d'ordine superiore e in esse calcoliamo i termini di 1° or-

dine (cf. §§ 38-39) – Intanto le $r-q$ trasformazioni d'ordine superiore sono date da

$$X_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) X_\lambda f$$

e la più generale di esse da

$$(24) \qquad \sum_{j}^{1\dots r-q} e_j \left\{ X_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) X_\lambda f \right\},$$

dove le e_j sono parametri arbitrari – Ponendo in evidenza nella (24) i termini di 1° ordine essa si scrive

$$(25) \sum_{j}^{1\dots r-q} e_j \sum_{i,k}^{1\dots n} \left\{ \left(\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k}\right)_{x=x^0} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) \left(\frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_k}\right)_{x=x^0} \right\} (x_k - x_k^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots ;$$

i coefficienti sono composti, come si vede, linearmente coi valori per $x = x^0$ dei termini fra parentesi nelle (23). Ma i termini di 1° ordine nelle (25) si possono calcolare direttamente dalle equazioni di definizione del gruppo come segue (v. § 39) – La trasformazione più generale d'ordine superiore ha pel § 39 lo sviluppo

$$\xi_i = \sum_k c_{ik} (x_k - x_k^{(0)}) + \dots$$

dove dei coefficienti c_{ik} possono prendersene ad arbitrio $\tau_1 = \varepsilon_1 - \nu_1$ e i rimanenti sono determinati linearmente ed omogeneamente per mezzo di questi.

Indicando dunque con

$e'_1 \; e'_2 \dots\dots e'_{r_1}$
i coefficienti c_{ik} che restano arbitrari, le stesse espressioni (25) potranno anche scriversi in questo altro modo

$$(25^*) \quad \sum_j^{1\dots r_1} e'_j \sum_{ik}^{1\dots n} \alpha_{jik}(x^0)(x_k - x_k^{(0)})\frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots\dots ,$$

dove i coefficienti $\alpha_{jik}(x^0)$ sono determinate funzioni analitiche delle $x^{(0)}$ calcolabili dalle equazioni di definizione. Il confronto delle (25), (25*) dimostra che si può soddisfare alle relazioni

$$\sum_j^{1\dots r-q} e_j \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k} - \sum_\lambda^{1\dots q} \psi_{j\lambda}(x^0)\frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_k} \right\}_{x=x^{(0)}} = \sum_j^{1\dots r_1} e'_j \, \alpha_{jik}(x^0)$$

$$(i, k = 1, 2 \dots n)$$

sia prendendo ad arbitrio le $r-q$ costanti e_j e determinando convenientemente le r_1 costanti e'_j, sia inversamente. E poichè ciò vale per qualunque sistema di valori delle $x^{(0)}$ e quindi per le $x^{(0)}$ variabili, si conclude che si possono soddisfare le n^2 equazioni

$$\sum_j^{1\dots r-q} e_j \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k} - \sum_\lambda \psi_{j\lambda}(x)\frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_k} \right\} = \sum_j^{1\dots r_1} e'_j \, \alpha_{jik}(x) \qquad (i, k = 1, 2 \dots n)$$

sia prendendo per le e_j funzioni arbitrarie delle x e determinando in modo opportuno le e'_j, sia inver-

samente.

Moltiplicando le precedenti per dx_k e sommando rispetto a k, vediamo che le (23) sono perfettamente equivalenti alle seguenti

$$\sum_k^{1\ldots n}\sum_j^{1\ldots r} e_j'\,\alpha_{jik}(x)\,dx_k = 0,$$

e quindi, siccome le e_j' restano funzioni arbitrarie delle x, alle nr equazioni seguenti

$$(26)\qquad \sum_k^{1\ldots n}\alpha_{jik}(x)\,dx_k = 0 \qquad \begin{cases} j=1,2,\ldots r, \\ k=1,2,\ldots n \end{cases}$$

Così il sistema di equazioni ai differenziali totali (21) (che sono le equazioni differenziali delle varietà sistatiche) è surrogato, come si voleva, dal sistema (26) che si può calcolare appena date le equazioni di definizione del gruppo.

Calcolate dunque le $\alpha_{jik}(x^0)$ da queste equazioni basterà costruire la matrice

$$\left\| \alpha_{ji1}(x^0),\ \alpha_{ji2}(x^0) \ldots\ldots \alpha_{jin}(x^0) \right\|$$

$$\begin{cases} j=1,2,\ldots r, \\ i=1,2,\ldots n \end{cases}$$

e se la caratteristica sarà $< n$ il gruppo sarà sistatico, invece asistatico quando la detta caratteristica sia $= n$.

Esempio. Prendansi le equazioni di definizione del gruppo dei movimenti calcolate al § 41 e si

sviluppino in serie i coefficienti $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore, tenendo conto dei termini del 1° ordine.

$$\xi_i = \{c_{i1}(x-x_0) + c_{i2}(y-y_0) + c_{i3}(z-z_0)\} + \cdots$$

Le equazioni di definizione danno

$$c_{ii} = 0 \qquad c_{ik} + c_{ki} = 0$$

onde le $r_1 = 3$ trasformazioni indipendenti fra queste sono

$$(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial z} - (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial y} - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial x}\ ,$$

le (26) diventano

$$dx = 0\ ,\ dy = 0,\ dz = 0$$

ed il gruppo e' asistatico -

Capitolo V°

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime - Sottogruppi invarianti e serie di composizione di un gruppo -

§ . 56

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime

Siano

$$X_k f = \sum_i^{1,\dots,n} \xi_{ki}(x_1 x_2 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$k = 1, 2, \dots q$$

q trasformazioni infinitesime delle quali supponiamo per ora soltanto che siano indipendenti senza esigere che generino un gruppo G_r - Indicando con

$$e_1 \; e_2 \; \dots \; e_q$$

q parametri arbitrarii, consideriamo la serie di ∞^{q-1} trasformazioni

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_q X_q f$$

Se in questa serie introduciamo nuove variabili x' al posto delle x, essa si muterà in una nuova serie formalmente diversa. Ma può ~~anche~~ darsi che la nuova serie non differisca dall'antica, sussistendo per valori qualunque delle e identità della forma

$$(1) \quad \sum_k^{1\dots q} e_k \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k^{1\dots q} e'_k \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} \; ,$$

dove le $\xi_{ki}(x')$ sono le medesime funzioni delle x' come le $\xi_{ki}(x)$ delle x e le $\underline{e}'$ sono convenienti funzioni delle $\underline{e}$. Se ha luogo una tale identità (1), o come scriviamo più brevemente

$$(1^*) \quad \sum_k^{1\dots q} e_k X_k f = \sum_k^{1\dots q} e'_k X'_k f \, ,$$

diremo che la serie delle ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime $\sum_k^{1\dots q} e_k X_k f$ è invariante per la trasforma-

zione delle x nelle x', od anche che essa ammette quest'ultima trasformazione.

Così per es. la serie

$$\sum_i^{1\dots n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ammette ogni trasformazione lineare omogenea nelle x

$$x'_i = \sum_k^{1\dots n} a_{ik}\, x_k$$

e si ha

$$e'_i = \sum_k^{1\dots n} a_{ik}\, e_k$$

Cominciamo dal dimostrare che se la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k^{1\dots q} e_k X_k f$ ammette la trasformazione

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

saranno in ogni caso nella relazione (1) o (1*) le e' funzioni lineari omogenee nelle e.

Esprimendo le x per le x' abbiamo

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} X_k(x'_i) \frac{\partial f}{\partial x'_i}$$

e ponendo

$$X_k(x'_i) = \eta_{ki}(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$$

la (1*), ove si eguaglino da una parte e dall'altra i coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial x'_i}$ dà:

$$(2)\qquad \sum_k^{1\dots q} e'_k\,\xi_{ki}(x') = \sum_k^{1\dots q} e_k\,\eta_{ik}(x').$$

Per ipotesi è possibile porre per le e' tali funzioni delle e da rendere identiche le (2) - Ma se poniamo nelle (2) per le x' q sistemi di variabili indipendenti,

$$\begin{matrix} x'_1 & x'_2 & \dots\dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots\dots & x''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(q)}_1 & x^{(q)}_2 & \dots\dots & x^{(q)}_n \end{matrix}$$

e ricordiamo che, secondo una discussione già fatta al §. 23, la matrice:

$$\left\| \xi_{k1}(x') \dots \xi_{kn}(x')\ \xi_{k1}(x'') \dots \xi_{kn}(x'') \dots \xi_{k1}(x^{(q)}) \dots \xi_{kn}(x^{(q)}) \right\|$$
$$k = 1, 2 \dots q$$

ha precisamente la caratteristica q, vediamo che le equazioni ottenute sono risolubili rispetto ad $e'_1, e'_2 \dots$ $\dots e'_q$ e però le e' sono appunto funzioni lineari omogenee delle e, c. d. d. -

§ . 57

Serie invarianti rispetto ad un gruppo G_1

Ricerchiamo ora la condizione affinchè la serie di ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime

$$\sum_k^{1\dots q} e_k X_k f$$

ammetta ogni trasformazione finita del gruppo G_1 ad un parametro generato da

$$Yf = \sum_i^{1\dots n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Per ciò, supposto che siano

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots\dots x_n ; t)$$

le trasformazioni finite di G_1 consideriamo

$$X_k' f = \sum_i \xi_{ki}(x_1' x_2' \dots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

e sviluppiamo $X_k' f$ per potenze di t, calcolando il coefficiente di t nello sviluppo. Il calcolo si fa molto semplicemente se si immagina prima d'aver ridotto, con una trasformazione di variabili il gruppo G_1 alla forma (§ 9)

$$x_i' = x_i \qquad i = 1, 2 \dots\dots n-1$$

$$x_n' = x_n + t,$$

con che Yf assume la forma

$$Yf = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Allora si ha:

$$X_k' f = \sum_i \xi_{ki}(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n + t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde sviluppando per potenze di t

$$X_k' f = X_k f + t \sum_i \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots$$

che possiamo scrivere

$$(3) \qquad X_k' f = X_k f + t(YX_k) + \dots,$$

dopo di che lo sviluppo vale per qualunque sistema di variabili.(*)

Ciò premesso, la $X'_k f$ deve essere, per qualunque t, una combinazione lineare omogenea di $X_1 f$, $X_2 f, \ldots X_q f$; in particolare ciò deve valere per $\frac{X'_k f - X_k f}{t}$ per $t=0$, e quindi avremo necessariamente

$$(4) \qquad (Y X_k) = \sum_j^{1\ldots q} g_{kj} X_j f \qquad (k=1,2\ldots q),$$

le g_{kj} essendo costanti numeriche.

Dimostriamo ora che queste condizioni (4) sono altresì sufficienti perchè la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammetta il gruppo Yf. Bisogna per ciò provare che si possono assumere per e' tali funzioni (lineari omogenee) delle e e di t che le e' si riducano alle e per $t=0$ e ne risulti l'identità:

$$\sum_k e'_k X'_k f = \sum_k e_k X_k f,$$

per la qual cosa è necessario e sufficiente che risulti il primo membro indipendente da t. Dobbiamo dunque avere

$$(5) \qquad \sum_k \frac{de'_k}{dt} X'_k f + \sum_k e'_k \frac{\partial X'_k f}{\partial t} = 0$$

(*) Se per un cangiamento qualunque di variabili x nelle $\bar{x}$ le operazioni Af, Bf si mutano in $\bar{A}f$, $\bar{B}f$, la (A,B) si muta infatti in $(\bar{A},\bar{B})$.

Per calcolare $X'_k f$ riprendiamo la Yf sotto la forma normale $\frac{\partial f}{\partial x_n}$; abbiamo

$$(6)\quad X'_k f = X_k f + t\sum_i \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{t^2}{\underline{|2}}\sum_i \frac{\partial^2 \xi_{ki}}{\partial x_n^2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots\dots + \frac{t^m}{\underline{|m}}\sum_i \frac{\partial^m \xi_{ki}}{\partial x_n^m}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots\dots$$

Ma dalle identità (4) supposte segue ora

$$(4^*)\quad \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n} = \sum_j g_{kj}\,\xi_{ji},$$

e quindi

$$\frac{\partial^m \xi_{ki}}{\partial x_n^m} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\,\frac{\partial^{m-1} \xi_{ji}}{\partial x_n^{m-1}}$$

Dopo di ciò derivando la (6) rapporto a t viene

$$\frac{\partial X'_k}{\partial t} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\left\{X_j f + t\sum_i^{1\dots n} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots\dots + \frac{t^{m-1}}{\underline{|m-1}}\sum_i^{1\dots n} \frac{\partial^{m-1} \xi_{ji}}{\partial x_n^{m-1}}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$$

e questa per la (6) stessa si scrive

$$(6^*)\quad \frac{\partial X'_k f}{\partial t} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\, X'_j f \quad (*)$$

(*) In luogo di servirsi degli sviluppi in serie per stabilire queste formole del testo si possono dedurre per derivazione così. Si ha

$$X'_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_{n-1}, x_n + t)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

indi

$$\frac{\partial X'_k f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \xi_{ki}(x_1 \dots x_{n-1}, x_n + t)}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e per la (4^*)

Sotto questa forma essa vale, come subito si vede, in qualunque sistema di variabili, senza che occorra ridurre la Yf alla forma $\frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Sostituendo nella (5) e scambiando nella seconda somma gli indici j, k, otteniamo

$$\sum_k^{1\ldots q}\left\{\frac{de_k'}{dt}+\sum_j^{1\ldots q} g_{jk}\, e_j'\right\}X_k'f=0$$

Poichè le $X_k'f$ sono indipendenti dobbiamo dunque prendere per le e' tali funzioni di t da sodisfare il sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti

$$(7)\qquad \frac{de_k'}{dt}+\sum_j^{1\ldots q} g_{jk}\, e_j'=0 \qquad (k=1,2\ldots q)$$

Viceversa, se operiamo in questo modo e indichiamo con e_i i valori iniziali delle e_i' (per $t=0$), avremo:

$$\sum_k e_k' X_k' f=\sum_k e_k X_k f$$

Formuliamo questi risultati nell'importante teorema:

Una serie di ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime

$$e_1X_1f+e_2X_2f+\ldots+e_qX_qf$$

ammette le trasformazioni del gruppo G_1 ad un pa-

$$\frac{\partial X_k'f}{\partial t}=\sum_i\sum_j g_{kj}\,\xi_{ji}(x_1\ldots x_{n-1},x_n+t)\frac{\partial f}{\partial x_i}=$$

$$=\sum_j g_{kj}\,X_j'f$$

rametro Y_f solo quando la Yf e le $X_k f$ sono legate da relazioni della forma

$$(Y, X_k) = \sum_j^{1\dots q} g_{kj} X_j f ,$$

a coefficienti g_{kj} costanti. Soddisfatte queste condizioni, la trasformazione

$$\sum_k e_k X_k f$$

prende per una trasformazione finita

$$x'_i = x_i + t Y x_i + \frac{t^2}{1.2} Y^2 x_i + \dots$$

di G_1 la forma $\sum_k e'_k X'_k f$, dove le e' si determinano, in funzioni di t, dalle equazioni differenziali (7)

$$(7) \qquad \frac{de'_k}{dt} + \sum_j^{1\dots q} g_{jk} e'_j = 0$$

colle condizioni iniziali $e'_i = e_i$ per $t = 0$.

Si osservi che dalle (7) risulta nuovamente il fatto, già constatato al § precedente, che le e' dipendono linearmente ed omogeneamente dalle e; le corrispondenti formole

$$e'_k = \sum_j^{1\dots q} \beta_{kj}(t) e_j$$

daranno le equazioni finite di un gruppo Γ_1 individuato dalle equazioni differenziali (7).

Come conseguenza del teorema generale superiore osserviamo che se la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammette separatamente i due gruppi ad un parametro

$$Y_1 f \quad , Y_2 f$$

ammetterà pure il gruppo

$$aY_1f + bY_2f$$

con a, b costanti, come pure (Y_1Y_2) — La prima cosa risulta dalla formola

$$(aY_1 + bY_2\ , X_k) = a(Y_1X_k) + b(Y_2X_k)$$

e la seconda dall'identità Jacobiana

$$((Y_1Y_2), X_k) + ((Y_2, X_k)\ , Y_1) + ((X_k, Y_1), Y_2) = 0$$

quando si applichi il teorema stesso —

§ 58
Trasformazioni finite della serie $\Sigma e_k X_k f$

Supponiamo ancora che la serie ∞^{q-1} di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammetta il gruppo Yf — Ciascuna delle trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ genera un gruppo G_1 che per le trasformazioni finite $x_i' = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; t)$ del gruppo Yf si muta precisamente nel gruppo generato dalla trasformazione infinitesima $\sum_k e_k' X_k' f$ (§ 11) — Ne segue che le trasformazioni di Yf non solo trasformano in sè stessa la serie di trasformazioni infinitesime $\Sigma e_k X_k f$ ma ancora quella delle ∞^q trasformazioni finite da esse generata —

Ogni trasformazione finita di questa serie ha lo sviluppo

gruppo Yf. Perciò dovrà l'espressione alternata (XY) differire sì da Xf che da Yf per un fattore costante; e siccome Xf, Yf sono supposte indipendenti si avrà dunque

$$(XY)=0$$

Viceversa, soddisfatta questa relazione, le equazioni differenziali (f) si riducono all'unica

$$\frac{de'}{dt}=0$$

e danno $e'=e$, ciò che dimostra come ogni trasformazione finita di Xf trasformi in se stessa una qualunque di Yf e inversamente. Abbiamo quindi il teorema:

Le trasformazioni finite di due gruppi Xf, Yf sono fra loro permutabili allora ed allora soltanto che si ha $(XY)=0$

Non sarà inutile far vedere come si può stabilire direttamente questo semplice risultato riducendo prima, con una trasformazione di variabili, una delle due trasformazioni Xf. Yf per es. la prima alla forma

$$Xf=\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Allora il primo gruppo ha le equazioni finite

$$A)\quad \begin{cases} x_i' = x_i & i=1,2\ldots n-1 \\ x_n' = x_n + t \end{cases}$$

e se poniamo che quelle del secondo siano

$$B)\begin{cases} x_1' = f_1(x_1\, x_2 \dots x_n ;\, \tau) \\ x_n' = f_n(x_1\, x_2 \dots x_n ,\, \tau)\,, \end{cases}$$

dove con τ abbiamo indicato il parametro nel 2° gruppo e supponiamo che per $\tau = 0$ venga la trasformazione identica. Per ipotesi una qualunque trasformazione A nel gruppo $A)$ deve essere permutabile con una qualunque B in $B)$ cioè

$$AB = BA$$

Questo ci dà che per qualunque t e τ si deve avere

$$f_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\,,\, x_n + t,\, \tau) = f_i(x_1 \dots x_{n-1}\, x_n\;\, \tau)$$

per $i = 1, 2, \dots n-1$

e

$$f_n(x_1\,, x_2 \dots x_{n-1}\,, x_n + t\,,\, \tau) = f_n(x_1, \dots \dots x_n\,.\, \tau)$$

Ne segue che le f_i per $i = 1, 2 \dots n-1$ debbono essere indipendenti da x_n, diciamo $f_i(x_1 \dots x_n\, \tau) = \varphi_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, \tau)$ e la f_n deve porsi sotto la forma

$$f_n = x_n + \varphi_n(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\; \tau)$$

riducendosi $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ ad $x_1\, x_2 \dots x_{n-1}$ per $\tau = 0$ e la φ_n a zero. Il 2° gruppo deve dunque avere equazioni finite della forma

$$(9)\begin{cases} x_i' = \varphi_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\; \tau) & i = 1, 2 \dots n-1 \\ x_n' = x_n + \varphi_n(x_1 \dots x_{n-1}\, \tau) \end{cases}$$

La trasformazione infinitesima generatrice di questo gruppo ha dunque l'espressione $Yf = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

dove le η_i non contengono x_n e perciò $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_n} = 0$, ossia $(XY) = 0$ –

Viceversa se questo accade, le trasformazioni

finite del secondo gruppo hanno la forma (9) e perciò ha luogo la permutabilità richiesta c.d.d. –

Dal teorema dimostrato segue un importante criterio per riconoscere se un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ consta di trasformazioni due a due permutabili; questo formuliamo nel teorema:

Le trasformazioni finite di un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ sono due a due permutabili solo quando tutte le espressioni alternate $(X_i X_k)$ sono identicamente nulle. –

Se, come nella teoria dei gruppi finiti, diciamo Abeliano un gruppo quando consta di trasformazioni permutabili possiamo enunciare il risultato anche così: Un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ è Abeliano quando tutte le sue costanti c_{iks} di composizione sono nulle. –

§ 60

Sottogruppi invarianti – Gruppi semplici

Sia G_r un gruppo generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f , X_2 f \dots X_r f$$

e G_m un sottogruppo di G a $\underline{m}$ parametri.

Se a[ccade] che il sottogruppo G_m sia permutabile con ogni trasformazione T di G_r, che

si abbia cioè

$$T^{-1} G_m T = G_m .$$

allora si dice che G_m è un sottogruppo invariante di G_r — Il sottogruppo G_m sarà generato da m trasformazioni infinitesime che, senza alterare la generalità, possiamo supporre siano le prime m

$$X_1 f \; , X_2 f \; \dots \dots X_m f$$

Allora il fatto che G_m è invariante in G_r si traduce in questo (§§ 57. 58) che le espressioni alternate

$$(X_i \, , X_k) \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = 1, 2 \dots m \end{cases}$$

si esprimono tutte linearmente con coefficienti costanti per

$$X_1 f \, , \, X_2 f \dots \dots X_m f$$

Secondo i risultati dei paragrafi precedenti, possiamo anche dire:

Se nel gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_m X_{m+1} \dots X_r)$ le trasformazioni della serie

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_m X_m f$$

costituiscono una serie invariante, esse formano un sottogruppo invariante G_m di G_r, generato dalle m trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f \dots \dots X_m f$

E infatti allora tutte le espressioni alternate $(X_i X_k)$ sopra considerate debbono in tal caso comporsi linearmente con X_1, $X_2 \dots X_m$ —

Ogni gruppo G_r si può dire possedere almeno due sottogruppi invarianti, cioè l'identità ed il gruppo stesso. Quando non esiste in G_r alcun altro sottogruppo invariante, il gruppo G_r si dice un gruppo semplice.

Per es. se esaminiamo la composizione del gruppo G_6 di movimenti dello spazio, quale fu stabilita al § 41, vediamo che in esso il gruppo G_3 delle traslazioni è un sottogruppo invariante (Abeliano); questo gruppo non è dunque semplice.

Osserviamo ora i due teoremi seguenti d'immediata dimostrazione:

1°. Le trasformazioni comuni a due sottogruppi invarianti Γ_m, $\Gamma'_{m'}$ di un gruppo G_r formano un nuovo sottogruppo invariante.

Una trasformazione comune a Γ_m, $\Gamma'_{m'}$ è infatti trasformata da una qualunque di G_r in un'altra che appartiene sì a Γ_m che a $\Gamma'_{m'}$.

2°. Se due sottogruppi invarianti di G_r non hanno alcuna trasformazione infinitesima comune (alcun sottogruppo comune), le trasformazioni finite dell'uno saranno permutabili con quelle dell'altro.

Se X_1f, $X_2f \dots X_mf$ sono le trasformazioni infinitesime del primo sottogruppo e Y_1f, $Y_2f \dots Y_{m'}f$ quelle del secondo, queste $m+m'$ trasformazioni sono indipendenti, altrimenti i due sottogruppi avrebbero

trasformazioni infinitesime a comune - D'altronde le espressioni alternate

$$(X_i . Y_k) \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots m \\ k = 1, 2, \dots m' \end{array} \right.$$

debbono comporsi linearmente sia con $X_1 \dots X_m$, sia con $Y_1 \dots\dots Y_{m'}$ e però sono identicamente nulle -

§ 61

Serie di composizione - Gruppi integrabili

Un sottogruppo invariante G_{r_1} di un gruppo G_r si dice massimo quando non esiste in G_r alcun sottogruppo invariante contenente G_{r_1} e più ampio.

Dato un gruppo G_r, prendiamo un suo sottogruppo invariante massimo G_{r_1}, indi un sottogruppo invariante massimo di G_{r_1}, sia G_{r_2}, e così via finchè si arrivi ad un gruppo semplice che non ha altro sottogruppo invariante (puro) fuori dell'identità.

La serie di gruppi

$$G_r, G_{r_1}, G_{r_2} \dots\dots G_{r_q}, 1,$$

così costituita che ciascun gruppo sia invariante massimo nel precedente dicesi una serie di composizione del gruppo -

Per un gruppo semplice la serie di composizione è unica e si riduce a due soli termini, il gruppo

dato e l'identità -

Un gruppo non semplice può possedere differenti serie di composizione, come fra poco vedremo, ma le differenze

$$r - r_1\,,\ r_1 - r_2\,, \ldots\ldots r_{q-1} - r_q\,,\ r_q\,,$$

che danno ogni volta l'eccesso del numero dei parametri di un gruppo nella serie su quello dei parametri nel gruppo successivo rimangono sempre le stesse, salvo l'ordine, comunque si cangi la serie di composizione - Dimostreremo questo teorema nel prossimo paragrafo; per ora osserviamo che esso è, nella teoria dei gruppi continui, l'analogo del noto teorema di Jordan sui fattori di composizione pei gruppi di un numero finito di operazioni.(*)

Un gruppo si dice integrabile, secondo Lie, quando possiede una serie di composizione in cui

(*) L'analogia diventa anche più evidente se si osserva che un gruppo a r parametri contiene ∞^r trasformazioni - Così G_{r_i} ha ∞^{r_i} trasformazioni e $G_{r_{i+1}}$ ne ha $\infty^{r_{i+1}}$, cioè G_{r_i} in confronto a $G_{r_{i+1}}$ ne possiede $\infty^{r_i - r_{i+1}}$ Le differenze $r_i - r_{i+1}$ misurano per ciò in certo modo il grado d'infinità delle trasformazioni in G_{r_i} rispetto a quelle di $G_{r_{i+1}}$; corrispondono per ciò esattamente ai fattori di composizione di Jordan -

tutte le differenze

$$r - r_1 \ , \ r_1 - r_2 , \dots\dots$$

siano uguali all'unità - In questo caso, pel teorema testè enunciato (teorema di Jordan), ogni altra serie di composizione ha la stessa proprietà - La denominazione d'integrabile data a tali gruppi proviene da ciò che nelle applicazioni ai problemi di integrazione l'integrabilità del gruppo significa che il problema è riducibile alle quadrature - Nella teoria dei gruppi continui i gruppi integrabili fanno riscontro ai gruppi risolubili (per radicali) nella teoria delle sostituzioni (V.º Cap. XI di queste Lezioni § 149) -

Come esempio di gruppi integrabili abbiamo:

Ogni gruppo Abeliano è integrabile -

E infatti se $G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$ è un gruppo Abeliano (§ 59) vuol dire che tutte le espressioni alternate (X_i, X_k) sono nulle - Per ciò le $h < r$ trasformazioni infinitesime $X_1, X_2 \dots X_h$ generano un sottogruppo G_h invariante - Se poniamo dunque:

$$G_1 = X_1 \ , \ G_2 = (X_1 . X_2) \ , \ G_3 = (X_1 . X_2 . X_3) \dots\dots$$

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \dots X_{r-1})$$

la serie

$$G_r \ , \ G_{r-1} \dots\dots G_{r-2} \dots G_2 \ \ G_1 \ \ 1$$

sarà evidentemente una serie di composizione in cui il numero dei parametri va diminuendo ogni volta, da un gruppo al successivo, appunto di un'unità.

§ 62
Gruppo derivato

Per un gruppo qualunque

$$G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$$

si può formare uno speciale sottogruppo invariante, la cui considerazione è importante in diverse ricerche, in particolare in quelle che riguardano l'integrabilità del gruppo. Dimostriamo perciò il seguente teorema: Le trasformazioni infinitesime date dalle espressioni alternate $(X_i X_k)$ generano esse stesse un gruppo, che è in ogni caso un sottogruppo invariante del gruppo primitivo G_r.

A questo sottogruppo di G_r si dà il nome di gruppo derivato di G_r

Che le trasformazioni infinitesime

$$Y_{ik} f = (X_i X_k) = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} X_s f$$

generino un gruppo risulta dal formare le espressioni alternate:

$$(Y_{ik}, Y_{lm}) = \left(\sum_s c_{iks} X_s f , \sum_t c_{lmt} X_t f \right) =$$

$$= \sum_s \sum_t c_{iks}\, c_{lmt}\, (X_s, X_t) =$$

$$= \sum_s \sum_t c_{iks}\, c_{lmt}\, Y_{st} f\,,$$

onde, pel teorema principale, le $Y_{ik} f$ generano un gruppo – Questo è evidentemente un sottogruppo di G_r perchè le Y_{ik} si compongono colle X_i; di più esso è invariante in G_r come dimostra la formola

$$(X_l, Y_{ik}) = \sum_s c_{iks} (X_l, X_s) = \sum_s c_{iks} Y_{ls} \,-$$

Questo gruppo derivato di G_r può del resto coincidere coll'identità o col gruppo stesso. La prima cosa avviene solo quando le costanti c_{iks} sono tutte nulle, cioè pei gruppi Abeliani; la seconda avviene di necessità quando G_r è semplice – Ma si osservi che non inversamente si può concludere che sia semplice il gruppo quando coincide col gruppo derivato – L'esempio del gruppo G_6 di movimenti lo dimostra chiaramente; il gruppo derivato coincide con G_6 come si legge nelle formole di composizione (§41); e tuttavia il gruppo non è semplice ammettendo come sottogruppo invariante il gruppo G_3 delle traslazioni –

Quando il gruppo derivato di G_r non coincide con G_r (o coll'identità) vi ha luogo a considerare il secondo gruppo derivato e così via.

Supposto che il gruppo derivato G_{r_1} di G_r con-

tenga $r_1 < r$ parametri, possiamo prendere le r_1 trasformazioni infinitesime di G_{r_1} come le prime

$$X_1 f, X_2 f \dots X_{r_1} f$$

di G_r e le rimanenti siano

$$X_{r_1+1} \dots \dots X_r f$$

Poichè tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

si compongono linearmente delle prime r_1, è evidente che aggregando a queste quante altre si vogliano indipendenti in G_r si verrà sempre a generare un sottogruppo invariante di G_r contenente G_{r_1} —
Così prendendo:

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \dots X_{r_1}, X_{r_1+1} \dots X_{r-1})$$

$$G_{r-2} = (X_1 X_2 \dots X_{r_1}, X_{r_1+1} \dots X_{r-2})$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$G_{r_1+1} = (X_1 X_2 \dots \dots X_{r_1} X_{r_1+1})$$

avremo in

$$G_r \quad G_{r-1} \quad G_{r-2} \dots \dots G_{r_1+1} \quad G_{r_1}$$

i primi termini di una serie di composizione di G_r che si completerà aggregandovi una serie di composizione di G_{r_1} — E poichè da G_r a G_{r_1} il numero dei parametri va decrescendo ad ogni passo di una unità, ne segue il teorema: Se il primo gruppo derivato di un gruppo G_r è integrabile, anche G_r è integrabile —

§ 63

Condizioni d'integrabilità di un gruppo

Dopo di ciò possiamo procedere alla ricerca delle condizioni d'integrabilità di un gruppo. In primo luogo se un gruppo G_r è integrabile deve possedere sottogruppi invarianti G_{r-1} con $r-1$ parametri e noi cominciamo dal dimostrare il teorema:

Affinchè un gruppo G_r posseda sottogruppi invarianti a $r-1$ parametri, è necessario e sufficiente che il primo gruppo derivato possegga $r_1 < r$ parametri (sia un puro sottogruppo).

Che la condizione sia sufficiente si è già visto sopra. Per provare che è necessaria poniamo che sia

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \ldots X_{r-1})$$

un sottogruppo invariante di

$$G_r = (X_1 X_2 \ldots X_{r-1} X_r)$$

Allora tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

si compongono linearmente con $X_1 X_2 \ldots X_{r-1}$ soltanto e perciò il gruppo derivato G_{r_1} è certo contenuto in G_{r-1}, cioè

$$r_1 \leq r-1 \quad c.d.d.$$

Notiamo ancora la proprietà d'immediata evidenza che il gruppo derivato di un sottogruppo è

sempre contenuto nel gruppo derivato del gruppo.

Ciò premesso, si può formulare il criterio per l'integrabilità di un gruppo col teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G_r a r parametri sia integrabile è che l'r^{mo} suo gruppo derivato coincida coll'identità

Questa condizione è necessaria; e infatti sia G_r integrabile e diciamo

$$G_r \; G_{r-1} \; G_{r-2} \ldots\ldots G_2 \; G_1 \; 1$$

una sua serie di composizione, ove il numero dei parametri va successivamente decrescendo di una unità. Il primo gruppo derivato di G_r è contenuto in G_{r-1}, il secondo gruppo derivato è quindi contenuto nel gruppo derivato di G_{r-1}, che è alla sua volta contenuto nel sottogruppo invariante G_{r-2} di G_{r-1}; dunque il secondo gruppo derivato è contenuto in G_{r-2}.

Per la medesima ragione il terzo è contenuto in G_{r-3}, ... l'$(r-1)^{mo}$ in G_1, onde l'r^{mo} coincide certamente coll'identità –

La condizione è poi sufficiente perchè se l'r^{mo} gruppo derivato è l'identità, l'$(r-1)^{mo}$ è Abeliano e perciò integrabile; pel teorema alla fine del paragrafo precedente ne segue successivamente che sono integrabili l'$(r-2)^{mo}$ gruppo derivato, l'$(r-3)^{mo}$ ... ec. .. fino al primo e quindi il gruppo stesso, c.d.d.

Si noti che nella serie dei gruppi derivati di un

gruppo qualsiasi G_r

$$G_r\,,\ G_{r_1}\,,\ G_{r_2}\,,\ G_{r_3}\,\ldots\ldots$$

il numero dei parametri va sempre decrescendo ogni volta almeno di un'unità finchè non si arresta ed allora tutti i gruppi derivati seguenti coincidono coll'ultimo, ciò che avviene al più tardi all'r^{mo} gruppo derivato. –

Si può quindi enunciare il teorema superiore nel modo seguente:

Un gruppo G_r non è integrabile quando la serie dei suoi gruppi derivati termina ad un gruppo G_ρ che non è l'identità. –

Segue facilmente da questi risultati l'altro teorema: Ogni sottogruppo di un gruppo integrabile è altresì integrabile.

Poniamo che sia G_r integrabile ed un suo puro sottogruppo G_q $(q<r)$ sia, se è possibile, non integrabile – L'ultimo gruppo derivato G_ρ di G_q è allora, per quanto precede, un effettivo gruppo non l'identità (pro). Chiamando

$$X_1f\,,\ X_2f\,\ldots\ldots X_\rho f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di G_ρ, le espressioni alternate

$$(X_i X_k) \qquad i, k = 1, 2, \ldots \rho$$

introducono già tutte le $X_1\, X_2 \ldots X_\rho$ e perciò qualunque gruppo derivato di G_ρ conterrebbe certamente G_ρ, onde G_r non sarebbe integrabile

§ 64
Prodotto di due gruppi permutabili

Ci volgiamo ora alla dimostrazione del già accennato teorema di Jordan, esteso da Lie ai gruppi continui. E per questo premettiamo due teoremi che sono perfettamente gli analoghi dei teoremi preliminari al teorema di Jordan, nella teoria dei gruppi di sostituzioni.

Il 1° teorema che dimostriamo è il seguente:

Siano G_m, $G_{m'}$ due gruppi di trasformazioni, ad m e m' parametri rispettivamente, e fra loro permutabili nel senso che ciascuno ammetta le trasformazioni dell'altro. Se il sottogruppo comune Γ_μ a G_m, $G_{m'}$ ha μ parametri, le trasformazioni infinitesime di G_m e $G_{m'}$ riunite saranno in numero di $m+m'-\mu$ indipendenti e daranno luogo ad un gruppo $H_{m+m'-\mu}$ con $m+m'-\mu$ parametri, contenente tanto G_m quanto $G_{m'}$ e Γ_μ stesso come sottogruppi invarianti.

Suppongasi

$$\Gamma_\mu = (X_1 X_2 \dots X_\mu)$$

$$G_m = (X_1 X_2 \dots X_\mu X_{\mu+1} \dots X_m)$$

$$G_{m'} = (X_1 X_2 \dots X_\mu Y_{\mu+1} \dots Y_{m'}),$$

sicché ogni trasformazione infinitesima comune a G_m, $G_{m'}$ si comporrà con

$$X_1 f . X_2 f \ldots\ldots X_\mu f$$

soltanto. Ciò porta che le $m+m'-\mu$ trasformazioni infinitesime

$$X_1 X_2 \ldots\ldots X_\mu X_{\mu+1} \ldots\ldots X_m Y_{\mu+1} \ldots\ldots Y_{m'}$$

sono fra loro indipendenti. Esse generano un gruppo perchè le loro espressioni alternate si compongono per l'ipotesi della permutabilità di G_m con $G_{m'}$ colle trasformazioni stesse. Questo gruppo H ha adunque $m+m'-\mu$ parametri.

$$H_{m+m'-\mu} = (X_1 X_2 \ldots X_\mu \ldots X_m Y_{\mu+1} \ldots Y_{m'})$$

e si vede subito che esso contiene G come sottogruppo invariante e medesimamente $G_{m'}$, indi anche G_μ (§ 60).

Dimostrato così il teorema, osserviamo che si può dargli ancora una forma più vicina a quella del teorema analogo dell'ordinaria teoria, in quanto che: il gruppo H consta di tutti e soli i prodotti di una trasformazione di G per una di G'.

Che tutti questi prodotti gg' appartengano ad H è naturale perchè ogni trasformazione g di G è in H, come ogni g' di G' e quindi anche il prodotto gg'. Per l'inversa si osservi che tutti i prodotti

$$gg'$$

costituiscono per sè un gruppo di trasformazioni a causa della permutabilità di G con G', la quale

porta che si può scrivere

$$gg' = g'g, \quad g_1 g' = g' g_1$$

essendo g_1 un'altra trasformazione di G e g_1' un'altra di G'. Ne segue p. e.

$$(gg')(g_1 g_1') = g g_1 g_2' g_1' = \bar{g} \cdot \bar{g}'$$

le lettere g senza accento indicando trasformazioni di G, quelle coll'accento trasformazioni di G'.

Così i prodotti gg' costituiscono un gruppo che contiene tanto G che G' ed avendo fra le sue trasformazioni infinitesime quelle dell'uno e quelle dell'altro gruppo, coincide con $H_{m+m'-\mu}$. c. d. d. -

§ . 65

Teorema relativo a due sottogruppi invarianti massimi

Per formulare più brevemente il secondo teorema che occorre al nostro scopo, introduciamo anche nella teoria dei gruppi continui la nozione di indice di un sottogruppo in un gruppo. Se G_r è un gruppo e G_q un suo sottogruppo, chiameremo indice di G_q rispetto a G_r la differenza $r-q$ fra i rispettivi numeri dei parametri.

Ciò posto, ecco l'enunciato del teorema in discorso:

Se un gruppo G_r contiene due diversi sottogruppi

invarianti massimi G_{r_1}, $G_{r'_1}$ ed è Γ_h il sottogruppo comune a G_{r_1}, $G_{r'_1}$, si avrà $h = r_1 + r'_1 - r$ ed il gruppo Γ_h sarà invariante massimo tanto in G_{r_1} quanto in $G_{r'_1}$ coll'indice $r_1 - h$ in G_{r_1} eguale all'indice di $G_{r'_1}$ in G_r e coll'indice $r'_1 - h$ in $G_{r'_1}$ eguale all'indice di G_{r_1} in G_r.

Supponiamo che si abbia

$$\Gamma_h = (X_1 X_2 \dots X_h)$$

$$G_{r_1} = (X_1 X_2 \dots X_h X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

$$G'_{r'_1} = (X_1 X_2 \dots X_h Y_{h+1} \dots Y_{r'_1});$$

pel teorema del § precedente le $r_1 + r'_1 - h$ trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 X_2 \dots X_h X_{h+1} \dots X_{r_1} Y_{h+1} \dots Y_{r'_1}$$

generano un sottogruppo H contenente sì G_{r_1} che $G_{r'_1}$ come sottogruppi invarianti e contenuto manifestamente in G_r, alla sua volta come sottogruppo invariante perchè le trasformazioni di H si compongono coi prodotti gg' di trasformazioni di G_{r_1} per trasformazioni di $G_{r'_1}$, ed essendo T una qualunque trasformazione di G_r la trasformata

$$T^{-1}(gg')T = (T^{-1}gT)(T^{-1}g'T)$$

è di nuovo un prodotto gg'(*). Ne risulta che

(*) La stessa cosa si vede anche subito ricorrendo

$H_{r_1+r_1'-h}$ coincide con G_r, altrimenti G_{r_1} (o $G_{r_1'}$) non sarebbero invarianti massimi in G_r. Dunque intanto

$$r_1+r_1'-h=r$$

o $h=r_1+r_1'-r$ come nell'enunciato del teorema.
Sappiamo già che Γ_h è invariante in G_r ed anche quindi in G_{r_1} o $G_{r_1'}$, ma in questi ultimi è invariante massimo. E infatti se fra Γ_h e G_{r_1} esiste un sottogruppo Λ_{h+k} invariante in G_{r_1} e contenente Γ_h, possiamo supporre

$$\Lambda_{h+k}=(X_1X_2\dots X_hX_{h+1}\dots X_{h+k})$$

naturalmente con $h+k<r_1$ e le espressioni alternate

$$(X_i,X_j)\begin{cases} i=1,2\dots r_1 \\ j=1,2\dots h+k \end{cases}$$

si comporranno linearmente con

$$X_1X_2\dots\dots X_{h+k}$$

Allora le $h+k+(r_1'-h)=r_1'+k<r$ trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1X_2\dots X_hX_{h+1}\dots X_{h+k}Y_{h+1}\dots Y_{r_1'}$$

genererebbero un sottogruppo (puro) di G_r invariante in G_r, a causa della proprietà sopra osservata delle espressioni alternate (X_i,X_j), e contenente $G_{r_1'}$, che non sarebbe dunque invariante massimo in G_r.

---

alle proprietà delle espressioni alternate.

§ 66
Teorema di Jordan - Lie

Col sussidio dei teoremi precedenti è facile ora dimostrare il teorema di Jordan, trasportato da Lie nella teoria dei gruppi continui, che si enuncia:
In due diverse serie di composizione

a) $G_r \; G_{r_1} \; G_{r_2} \ldots\ldots G_{r_q} \; 1$

b) $G_r \; \Gamma_{\rho_1} \; \Gamma_{\rho_2} \ldots\ldots \Gamma_{\rho_s} \; 1$

di un medesimo gruppo G_r, le due serie di differenze

$$r-r_1 \,,\; r_1-r_2 \,,\ldots\ldots r_q$$

$$r-\rho_1 \,,\; \rho_1-\rho_2 \ldots\ldots \rho_s \,,$$

cioè degli indici dei successivi gruppi nel precedente nella serie, sono le stesse prescindendo dall'ordine.
Questi numeri fissi si diranno per abbreviare gli indici di composizione del gruppo.

Ne segue in particolare che il numero dei gruppi in ciascuna serie è il medesimo $(q=s)$.

La dimostrazione si fa ora nel modo stesso dell'ordinaria teoria, provando che il teorema è vero pei gruppi a r parametri, supposto che lo sia per quelli ad un numero di parametri $< r$; siccome per $r=1,2$ sussiste certamente, così è vero in generale.

Ora essendo G_{r_1} Γ_{ρ_1} due distinti sottogruppi in-

varianti massimi in G_r, possiamo applicare il teorema del paragrafo precedente, e se Γ_h è il loro sottogruppo comune, questo sarà invariante massimo sì in G_{r_1} che in Γ_{ρ_1} - Sia ora

$$\Gamma_h \; \Gamma_{h_1} \; \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

una serie di composizione di Γ_h; saranno due nuove serie di composizione di G_r le seguenti

$$\alpha) \quad G_r \; G_{r_1} \; \Gamma_h \; \Gamma_{h_1} \; \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

$$\beta) \quad G_r \; \Gamma_{\rho_1} \; \Gamma_h \; \Gamma_{h_1} \; \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

(Le due serie a) α), avendo a comune il primo ed il secondo gruppo ed essendo $r_1 < r$, hanno i medesimi indici di composizione; per la stessa ragione le due serie b) β) - Basterà dunque trovare che le due serie α) β) hanno gli stessi indici di composizione perchè ne risulti la medesima cosa per le due serie a) b), come si voleva.

Ora α) β) coincidono da Γ_h in poi e quindi da quel punto hanno i medesimi indici (nello stesso ordine). Quanto ai due primi che sono per la α)

$$r - r_1 \qquad r_1 - h$$

e per la β

$$r - \rho_1 \qquad \rho_1 - h$$

basta ricordare che pel teorema al § 65 si ha

$$h = r_1 + \rho_1 - r$$

e quindi

$$r - r_1 = \rho_1 - h \quad , \quad r - \rho_1 = r_1 - h$$

Dunque nelle due serie α) β) i due primi indici sono soltanto permutati e ciò completa la dimostrazione del teorema -

Termineremo queste prime ricerche sulle serie di composizione dei gruppi continui col ricordare che nella teoria dei gruppi di sostituzioni il teorema di Jordan riceve un importante complemento nel teorema di Hölder. Questo vale ancora nella teoria dei gruppi continui ma non potremo dimostrarlo che più tardi quando avremo introdotta la nozione d'isomorfismo dei gruppi e ne avremo studiate le proprietà (Cf. Cap. VIII § 97) -

Capitolo VI°

Il gruppo aggiunto e i sottogruppi di un gruppo - Sottogruppi a due parametri - Equazione caratteristica - Composizione o struttura di un gruppo - Il genere (Rang) di un gruppo secondo Killing.

§ 67

Permutazioni fra le trasformazioni di un gruppo indotte dalle trasformazioni stesse

Ad ogni gruppo G_r ad r parametri è collegato un gruppo di sostituzioni lineari omogenee sopra r variabili, con un numero di parametri uguale o inferiore ad r, il così detto gruppo aggiunto (adjungirte Gruppe) - La considerazione di questo gruppo aggiunto è di grande importanza in molte parti della teoria, in particolare nella ricerca dei sottogruppi di G_r e della loro classificazione.

Perveniamo al gruppo aggiunto nel modo seguente. Consideriamo un gruppo G_r a r parametri, le cui trasformazioni finite siano

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n, a_1 a_2 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

e indichiamo in generale con S_a la trasformazione coi parametri $a_1, a_2 \dots a_r$ –

Se trasformiamo tutte le S_a con una trasformazione fissa S_α di G_r, le trasformate

$$S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha$$

coincidono, in altro ordine, colle S_a stesse, onde avremo

$$S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha = S_{a'},$$

dove i parametri a' dipenderanno evidentemente dai parametri a e dai parametri α, scriviamo

$$(2) \qquad a'_i = \varphi_i (a_1\, a_2 \dots a_r ; \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r)$$

È facile vedere che queste formole (2), quando vi si riguardino le a come variabili e le α come parametri, definiscono un gruppo di trasformazioni – È infatti se trasformiamo nuovamente le $S_{a'}$ colla S_β e poniamo

$$S_\beta^{-1} S_{a'} S_\beta = S_{a''},$$

avremo

$$(2^*) \qquad a''_i = \varphi_i (a'_1\, a'_2 \dots a'_r ; \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r)$$

Ma si può scrivere

$$S_{a''} = S_\beta^{-1} S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha S_\beta = (S_\alpha S_\beta)^{-1} S_a (S_\alpha S_\beta)$$

e poiché la $S_\alpha S_\beta$ è di nuovo una trasformazione di G_r, diciamo

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma$$

(dove i parametri γ saranno certe funzioni di $\alpha\beta$) ne risulterà

$$S_{a''} = S_\gamma^{-1} S_a S_\gamma$$

e quindi

$$a''_i = \varphi_i(a_1 a_2 \dots a_r ; \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r),$$

e ciò dimostra appunto che componendo due trasformazioni qualunque (2), (2*) della serie (2) coi rispettivi parametri α, β si ottiene una terza trasformazione della serie stessa, coi parametri γ; dunque le (2) sono le equazioni finite di un gruppo. Come si vede, questo gruppo (2) definisce la legge secondo cui si permutano fra loro le trasformazioni del gruppo dato G_r, quando si trasformino contemporaneamente con una trasformazione di G_r stesso. Il gruppo (2) contiene sempre l'identità e insieme ad ogni trasformazione anche l'inversa. Il numero dei suoi parametri essenziali non supera certo r, ma può essere $< r$; ciò avviene quando esista una continuità di trasformazioni in G_r producenti la medesima permutazione sulle sue trasformazioni e quindi in G_r un sottogruppo effettivo le cui trasformazioni siano tutte permutabili con quelle di G_r. Se questo sottogruppo commutativo di G_r ha p parametri, il gruppo (2) possiede, come facilmente si vede e come confermeremo

fra breve calcolando le sue trasformazioni infinitesime, precisamente r-p parametri. Può darsi che sia $p=r$; allora il gruppo G_r è Abeliano ed il gruppo (2) si riduce alla pura identità.

§ 68
Forma canonica delle equazioni di G_r

Se nel gruppo (1) facciamo un cangiamento di parametri, il gruppo (2) assume una forma diversa; però gli infiniti gruppi (2) che corrispondono ad un medesimo gruppo (1) sono chiaramente tutti simili fra loro. Fra le infinite forme che si possono dare al gruppo (2) ve ne ha una molto notevole, caratterizzata dal fatto che le (2) sono lineari omogenee nei parametri a.

Per ottenere il gruppo (2) sotto questa forma speciale basta porre le equazioni (1) del gruppo G_r sotto la forma già considerata al § 58 dove abbiamo parlato delle trasformazioni finite

$$\sum_k e_k X_k f$$

del gruppo. Questa forma è data dagli sviluppi in serie

$$(4)\qquad x_i' = x_i + \sum_k e_k X_k x_i + \frac{1}{1.2}\sum_{k,j} e_k e_j X_k X_j x_i + \cdots\cdots ,$$

essa dicesi la forma canonica delle equazioni del gruppo ed i parametri sono

$$e_1\ e_2 \ldots\ldots e_r$$

Invece di definire la forma canonica delle equazioni del gruppo cogli sviluppi in serie (4) si può ricorrere ad un sistema di equazioni differenziali.

Ricordando per ciò che le trasformazioni di G_r non sono altro che la totalità delle trasformazioni dei gruppi ad un parametro generati dalle trasformazioni infinitesime

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f,$$

colle λ costanti, basta integrare il sistema di equazioni differenziali simultanee:

$$\frac{dx_1'}{\sum_k \lambda_k \xi_{k1}(x')} = \frac{dx_2'}{\sum_k \lambda_k \xi_{k2}(x')} = \ldots\ldots = \frac{dx_n'}{\sum_k \lambda_k \xi_{kn}(x')} = dt$$

colle condizioni di limiti

$$x_i' = x_i \quad \text{per } t = 0,$$

e nelle equazioni integrali

$$x_i' = \varphi_i(x_1\ x_2 \ldots x_n\ ;\ \lambda_1 t,\ \lambda_2 t \ldots \lambda_r t),$$

che contengono le λ e la t solo nei prodotti $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t \ldots \lambda_r t$, porre

$$e_1 = \lambda_1 t\ ,\ e_2 = \lambda_2 t \ldots\ldots\ e_r = \lambda_r t\ .$$

Così si ottengono le equazioni del gruppo sotto la forma

$$(4^*) \qquad x_i' = \varphi_i(x_1\ , x_2 \ldots x_n\ ;\ e_1\ , e_2 \ldots e_r),$$

che è appunto la forma canonica -

È da notarsi poi che, secondo i risultati ottenuti al § 16, gli antichi parametri a son definiti in funzione dei parametri canonici $e_1 \ldots\ldots e_r$ dal sistema di equazioni differenziali ivi segnate (32), cioè dal sistema

$$(A) \qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \lambda_s \, \alpha_{sk}(a_1 \ldots\ldots a_r)$$

colle condizioni iniziali

$$a_k = a_k^{(0)} \quad \text{per } t = 0$$

La forma canonica (4) o (4*) delle equazioni del gruppo non è per sè perfettamente fissata poichè essa cangia quando per trasformazioni infinitesime generatrici di G_r si prendano, al posto di

$$X_1 f, \; X_2 f \; \ldots\ldots \; X_r f$$

r loro combinazioni lineari indipendenti - Con questo i parametri e subiscono una sostituzione lineare omogenea, che può del resto essere qualunque.

Dunque: La forma canonica delle equazioni di un gruppo è determinata a meno di una sostituzione lineare omogenea nei parametri e.

L'importanza della forma canonica delle equazioni di un gruppo risulta subito dalle considerazioni seguenti - Ogni trasformazione finita $\sum_k e_k X_k f$ (§ 58) del gruppo è fissata dai valori dei parametri $e_1 e_2 \ldots e_r$ -

Se interpretiamo $e_1, e_2 \ldots e_r$ come coordinate carte-

siano in uno spazio lineare a r dimensioni, che indichiamo con E_r, le trasformazioni di G_r sono rappresentate biunivocamente sui punti di E_r - Ora diciamo che: In questa rappresentazione ogni sottogruppo G_m a m parametri di G_r è rappresentato da uno spazio lineare subordinato a m dimensioni E_m passante per l'origine $e_1 = e_2 = \dots = e_r = 0$

È infatti se

$$Y_1 f = \sum_i^{1\dots r} h_{1i} X_i f \quad , \quad Y_2 f = \sum_i^{1\dots r} h_{2i} X_i f, \dots\dots$$

$$Y_m f = \sum_i^{1\dots r} h_{mi} X_i f$$

sono le m trasformazioni infinitesime generatrici di G_m (colle h_{ki} costanti), qualunque trasformazione finita di G_m è rappresentata dal simbolo

$$\sum_s^{1\dots m} \varepsilon_s Y_s f$$

e però da $\sum_k e_k X_k f$, dove le e si esprimono per le ε colle formole

$$e_i = \sum_s^{1\dots m} h_{si}\, \varepsilon_s \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

Variando le ε il punto $(e_1\, e_2 \dots e_r)$ descrive appunto uno spazio lineare E_m per l'origine. Così un sottogruppo G_1 sarà rappresentato da una retta per l'origine, il sottogruppo G_2 da un piano per l'origine ecc.

Diciamo però subito che non inversamente qualunque E_m per l'origine rappresenterà un sottogrup-

po G_m; ciò avverrà solo in casi eccezionali (cf. §73).

§ 69

Il gruppo aggiunto e le sue trasformazioni infinitesime

Se le equazioni del gruppo (1) si pongono sotto forma canonica, i risultati ottenuti ai §§ 57, 58 sulle serie invarianti di trasformazioni dimostrano immediatamente che le equazioni (2) daranno i nuovi parametri e' espressi linearmente ed omogeneamente pei parametri e. Secondo il § 57, possiamo definire le e' in funzione delle e per mezzo di un sistema di equazioni differenziali, le equazioni (7) di quel §.

Prendiamo per ciò un sottogruppo G_1 ad un parametro di G_r e sia

$$Yf = \sum_k \lambda_k X_k f$$

la sua trasformazione infinitesima e supponiamo che per la trasformazione finita di G_r dal simbolo

$$\sum \lambda_k t . X_k f$$

la trasformazione $(e_1\, e_2 \dots e_r)$ si cangi in $(e'_1 \dots e'_r)$.
Poiché si ha

$$(YX_k) = \sum_i^{1\dots r} \lambda_i (X_i X_k) = \sum_{i,s}^{1\dots r} c_{iks} \lambda_i X_s f$$

le costanti g_{ks} del § 57 sono date da

$$g_{ks} = \sum_i^{1\dots r} c_{iks}\lambda_i$$

e per ciò le citate equazioni differenziali (7) diventano qui

$$(5) \qquad \frac{de'_k}{dt} + \sum_{i,j}^{1\dots r} c_{ijk}\lambda_i e'_j = 0$$

colle condizioni iniziali

$$e'_k = e_k \quad \text{per } t=0.$$

Integrando questo sistema, ciò che richiede soltanto la risoluzione di un'equazione algebrica, e ponendo

$$\alpha_1 = \lambda_1 t \;, \quad \alpha_2 = \lambda_2 t \;, \;\dots\dots \alpha_r = \lambda_r t$$

si avranno le formule

$$(6) \qquad e'_i = \sum_k^{1\dots r} \rho_{ik}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) e_k \,,$$

dove i coefficienti ρ_{ik} sono funzioni dei parametri α. – Le (6) danno, come si voleva al gruppo (2) del § 67 la forma lineare che si cercava.

Così vediamo che: Ad ogni gruppo G_r a r parametri è coordinato un gruppo (6) di sostituzioni lineari omogenee sopra r variabili e. Questo gruppo (6) definisce la legge secondo cui si permutano le operazioni di G_r, trasformate con una medesima operazione di G_r stesso; esso dicesi il gruppo aggiunto di G_r.

Le equazioni (5) conducono subito a trovare le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto

esprimendole soltanto per le costanti di composizione c_{ijk} - Infatti queste equazioni differenziali, colle condizioni iniziali $e'_k = e_k$ per $t=0$ tenendovi costanti le λ, definiscono un sottogruppo ad un parametro del gruppo aggiunto, generato dalla trasformazione infinitesima

$$\sum_i^{1\ldots r} \lambda_i \sum_{jk}^{1\ldots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Se poniamo adunque

$$(7) \qquad E_i f = \sum_{j,k}^{1\ldots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

$$i = 1, 2 \ldots r$$

abbiamo il risultato:

Tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto si compongono linearmente colle r trasformazioni

$$E_1 f = \sum_{jk}^{1\ldots r} c_{j1k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}, \quad E_2 f = \sum_{jk}^{\ldots r} c_{j2k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}, \ldots\ldots$$

$$E_r f = \sum_{jk}^{1\ldots r} c_{jrk}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Queste r trasformazioni $E_i f$ possono essere o no indipendenti secondo la natura del gruppo G_r (delle costanti c_{iks}), cioè il gruppo aggiunto può avere r o meno parametri, come già abbiamo osservato al § 67 e come meglio vedremo nel prossimo paragrafo. In ogni caso osserviamo che fra le r trasformazioni (7) ha sempre luogo la relazione lineare

omogenea a coefficienti variabili,

$$e_1 E_1 f + e_2 E_2 f + \dots + e_r E_r f = 0,$$

ciò che risulta immediatamente dalla relazione

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0$$

Segue di qui il teorema:

"Il gruppo aggiunto sui parametri e è sempre intransitivo -

Come è naturale, le espressioni alternate

$$(E_i, E_k)$$

debbono comporsi linearmente colle E stesse.

Ora eseguendo il calcolo troviamo:

$$(E_i\, E_k) = \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \Big\{ \sum_\mu c_{\mu k s} E_i(e_\mu) - \sum_\nu c_{\nu i s} E_k(e_\nu) \Big\} =$$

$$= \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \sum_{\mu\nu} (c_{\mu k s} c_{\nu i \mu} - c_{\mu i s} c_{\nu k \mu}) e_\nu ,$$

che per le relazioni quadratiche (I) § 27 fra c_{iks}, si scrive

$$(E_i\, E_k) = \sum_\mu c_{ik\mu} \sum_{\nu, s} c_{\nu\mu s}\, e_\nu \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_\mu c_{ik\mu} E_\mu f ;$$

dunque:

Le trasformazioni infinitesime (7) del gruppo aggiunto sono legate fra loro dalle relazioni

$$(E_i\, E_k) = \sum_s c_{iks} E_s f$$

colle medesime costanti di composizione c_{iks} del gruppo dato.

§ 70

Numero dei parametri del gruppo aggiunto

Si è già detto (§ 67) che il numero dei parametri del gruppo aggiunto di un gruppo G_r può essere inferiore ad r, e persino ridursi a zero (nel caso di un gruppo Abeliano). Il numero ρ di questi parametri essenziali eguaglia il numero di trasformazioni infinitesime indipendenti fra le $E_1 f, E_2 f \dots E_r f$, non legate cioè da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Una relazione

$$g_1 E_1 f + g_2 E_2 f + \dots\dots + g_r E_r f = 0$$

a coefficienti costanti g_i si traduce, per l'espressione (7) della E_i, nelle r^2 equazioni omogenee fra le g

$$(8) \quad \sum_i g_i c_{jik} = g_1 c_{j1k} + g_2 c_{j2k} + \dots\dots + g_r c_{jrk} = 0$$

$$j, k = 1, 2, \dots r$$

Vi sono quindi tante delle $E_i f$ fra loro indipendenti quante unità sono nella caratteristica della matrice

$$\| c_{j1k} \; c_{j2k} \dots\dots c_{jrk} \|$$

$$j, k = 1, 2 \dots r$$

Dunque: Il numero ρ dei parametri del gruppo aggiunto eguaglia la caratteristica della matrice

$$\| c_{j1k}\ c_{j2k} \cdots\cdots c_{jrk} \| \qquad j, k = 1, 2 \ldots r$$

formata colle costanti di composizione del gruppo dato G_r.

Ma si può porre questo risultato sotto un'altra forma più importante. Il sussistere delle (8) equivale perfettamente all'annullarsi dell'espressione alternata

$$\left(\sum_i g_i X_i , X_j \right) = 0$$
$$j = 1, 2 \ldots r$$

Ciò significa (§§ 57, 58) che tutte le trasformazioni finite del sottogruppo G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$g_1 X_1 f + g_2 X_2 f + \cdots\cdots + g_r X_r f$$

sono permutabili con ogni trasformazione di G_r — Diremo allora, per abbreviare che la trasformazione infinitesima $\sum_i g_i X_i f$ é permutabile con tutte le $X_i f$ e la trasformazione infinitesima stessa si dirà eccezionale (ausgezeichnet secondo Lie) — Ad ogni identità lineare

$$\sum_i g_i E_i f = 0$$

fra $E_1 f, \ldots E_r f$ corrisponde dunque una trasformazione infinitesima eccezionale in G_r ed inver-

samente. Saranno dunque tante le relazioni indipendenti fra $E_1 f$ ..... $E_r f$ quante trasformazioni infinitesime eccezionali distinte possiede il gruppo G_r - Poniamo che queste siano $\underline{m}$ e prendiamole per

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_m f;$$

queste generano manifestamente un sottogruppo (invariante) G_m di G_r precisamente il sottogruppo già detto al § 67 il sottogruppo commutativo, formato da tutte e sole le trasformazioni di G_r permutabili con ogni altra nel gruppo - Come si vede, se il sottogruppo commutativo possiede $\underline{m}$ parametri, il gruppo aggiunto ne ha precisamente $r-m$ -

Supponiamo che il gruppo G_r possegga un effettivo sottogruppo commutativo G_m $(m>0)$, cioè che il gruppo aggiunto abbia meno di r parametri - È facile allora vedere che il gruppo G_r è necessariamente sistatico (§ 53) - Infatti il sottogruppo commutativo G_m cangia un punto arbitrario P dello spazio in punti che hanno a comune il sottogruppo di stabilità, che restano cioè fissi per tutte le trasformazioni che lasciano P stazionario; dunque il gruppo G_r è sistatico -

Ne segue che: Il gruppo aggiunto di un grup-

po asistatico ha sempre tanti parametri quanti il gruppo.

Se si ricorda che un gruppo sistatico è sempre anche imprimitivo, si vede anche che: Il gruppo aggiunto di ogni gruppo primitivo a r parametri possiede pure r parametri essenziali.

La stessa cosa risulta dall'osservare che se il gruppo G_r possiede una trasformazione infinitesima eccezionale $\sum g_i X_i f$, l'equazione lineare omogenea a derivate parziali

$$\sum_i g_i X_i f = 0$$

ammette il gruppo G_r, che è per conseguenza imprimitivo (§§ 51, 52).

Terminiamo queste generalità sul gruppo aggiunto coll'osservare che, per la definizione stessa di questo gruppo, fra le trasformazioni del gruppo G_r e quelle del suo aggiunto Γ_{r-m} viene stabilita una tale corrispondenza che ad una di G_r ne corrisponde una perfettamente determinata in Γ_{r-m}, laddove ad una di Γ_{r-m} ne corrisponde una serie ∞^m in G_r; la corrispondenza poi soddisfa alla proprietà caratteristica che al prodotto di due trasformazioni in G_r corrisponde il prodotto delle corrispondenti in Γ_{r-m}.

È questo un caso particolare della relazione

così detta d'isomorfismo (in generale meriedrico) fra due gruppi di cui fra breve tratteremo. Per le trasformazioni infinitesime de' due gruppi questa relazione si traduce nel fatto, già osservato alla fine del paragrafo precedente, che le costanti di composizione delle $Z_i f$ sono le medesime che per le $X_i f$.

§. 71

Ricerca dei sottogruppi di un gruppo

La considerazione del gruppo aggiunto è molto utile, come si è già detto, specialmente nella ricerca dei sottogruppi di un gruppo. Intanto cominciamo dal far vedere come questa ricerca si riconduca in ogni caso alla discussione di un sistema di equazioni algebriche. Sia G_r un gruppo generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, X_2 f, \ldots \ldots X_r f$$

e si tratti di trovare i sottogruppi G_m a $\underline{m}$ parametri di G_r. Se con

$$Y_1 f, Y_2 f, \ldots Y_m f$$

indichiamo le $\underline{m}$ trasformazioni infinitesime generatrici di G_m, queste saranno combinazioni

lineari, a coefficienti costanti delle X, poniamo

$$Y_i f = \sum_s^{1\dots r} h_{is} X_s f$$

$$(i = 1, 2 \dots m)$$

Perché le Yf generino un gruppo G_m è necessario e sufficiente determinare le rm costanti h_{is} in guisa che $Y_1 \dots Y_m$ siano indipendenti, cioè la matrice

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{m1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1r} & h_{2r} & \dots & h_{mr} \end{Vmatrix}$$

abbia la caratteristica $\underline{m}$ e di più le espressioni alternate

$$(Y_i, Y_l) = \sum_{s,t}^{1\dots r} h_{is} h_{lt} (X_s, X_t) =$$

$$= \sum_{s,t,\lambda}^{1\dots r} c_{st\lambda} h_{is} h_{lt} X_\lambda f$$

siano combinazioni lineari, a coefficienti costanti, delle Y stesse. Se poniamo dunque

$$(Y_i, Y_l) = \sum_r^{1\dots m} \gamma_{ilr} Y_r f$$

ne verranno per le incognite h e γ le

$$(9) \quad \sum_r^{1\dots m} h_{r\lambda} \gamma_{ilr} = \sum_{s,t}^{1\dots r} c_{st\lambda} h_{is} h_{lt}$$

$$(i, l = 1, 2 \dots m, \quad \lambda = 1, 2 \dots r)$$

Per ogni coppia fissa (i, l), queste sono per le

incognite $\gamma_{il1}\, \gamma_{il2} \cdots \gamma_{ilm}$ $r\, r\, m$ equazioni lineari, onde la matrice

$$(10)\qquad \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} & \sum_{s,t}^{1\dots r} c_{st1}\, h_{is}\, h_{lt} \\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{m2} & \sum_{s,t}^{1\dots r} c_{st2}\, h_{is}\, h_{lt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{1r} & h_{2r} & \cdots & h_{mr} & \sum_{s,t}^{1\dots r} c_{str}\, h_{is}\, h_{lt} \end{matrix} \right\|$$

deve avere la stessa caratteristica della matrice delle h, cioè la caratteristica m. Dunque le incognite h debbono annullare tutti i minori d'ordine $m+1$ nella matrice (10) e viceversa se soddisfano a queste equazioni algebriche, e di più danno alla matrice delle h caratteristica $= m$, le (9) danno per le γ valori determinati e finiti e le $Y_1 f, Y_2 f, \dots Y_m f$ generano effettivamente un sottogruppo G_m di G_r.

Così il problema è ricondotto ad una questione algebrica. Per altro questo metodo, teoricamente soddisfacente offrirebbe presto in pratica difficoltà insormontabili.

§ 72

Sottogruppi affini

Come nella teoria dei gruppi di sostituzio-

ni così anche in quella dei gruppi continui diremo affini (gleichberechtigt) due trasformazioni S_a, S_b di un gruppo G_r quando esista in G_r qualche trasformazione T che trasformi S_a in S_b -

$$T^{-1}S_aT = S_b$$

(e allora l'inversa T^{-1} trasformerà S_b in S_a) -

Similmente diremo affini due sottogruppi G_{r_1}, G'_{r_1} di G_r quando esistano in G_r trasformazioni T che trasformino l'uno nell'altro

$$T^{-1}G_{r_1}T = G'_{r_1} \quad , \quad TG'_{r_1}T^{-1} = G_{r_1}$$

Due sottogruppi affini ad un terzo sono manifestamente affini fra loro, sicchè i sottogruppi di G_r potranno ripartirsi in classi o tipi, comprendendo nel medesimo tipo quelli tra loro affini. E potremo dire di conoscere tutti i sottogruppi di G_r quando per ogni tipo sia noto un rappresentante -

Due sottogruppi affini G_{r_1}, G'_{r_1} sono rappresentati nello spazio E_r del gruppo aggiunto da due spazii lineari per l'origine (§ 68)

$$E_{r_1} \ , \ E'_{r_1}$$

i quali nascono l'uno dall'altro per una trasformazione del gruppo aggiunto - Se dunque allo spazio lineare E_{r_1}, rappresentante del sottogruppo G_{r_1} applichiamo tutte le trasformazioni del gruppo

aggiunto avremo una serie di E_r, i cui singoli spazii rappresenteranno tutti e soli i sottogruppi del tipo di G_{r_1} - In particolare se G_{r_1} è invariante in G_r, lo spazio E_{r_1} dovrà essere trasformato in sè medesimo da tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto -

Applichiamo subito queste considerazioni a due casi più semplici e cioè:

1° a trovare i diversi tipi di trasformazioni finite in un gruppo,

2° alla ricerca dei diversi tipi dei sottogruppi ad un parametro -

Pel primo caso basta osservare che una trasformazione finita è rappresentata da un punto $(e_1\, e_2 \ldots e_r)$ di E_r e due trasformazioni affini da due punti equivalenti di E_r rispetto al gruppo aggiunto.

Dunque: Per classificare in tipi le trasformazioni di un gruppo G_r si determinino nello spazio E_r del gruppo aggiunto le varietà minime invarianti rispetto a questo gruppo (§ 47); ciascuna di queste varietà rappresenta un tipo di trasformazioni.

Per risolvere anche il secondo osserviamo che ogni trasformazione finita T di G_r determina un sottogruppo G_1 in cui è contenuta, rappresentato in E_r dalla retta che unisce l'origine al punto

immagine di T. Due trasformazioni T, T' affini appartengono a sottogruppi affini e viceversa, se due sottogruppi G_1 sono affini, ad una trasformazione dell'uno è affine una trasformazione dell'altro. Il secondo problema è così ricondotto al primo. Presa una delle varietà minime invarianti V sopra considerate, basterà proiettarla dall'origine e i raggi projettanti rappresenteranno i sottogruppi G_1 dello stesso tipo. Si osservi che può anche darsi che la varietà primitiva V contenga già uno dei raggi projettanti da O e quindi tutti gli altri; allora accadrà che tutte le trasformazioni dei corrispondenti G_1 del tipo saranno affini.

§ 73

Rappresentazione nello spazio ad $r-1$ dimensioni

Spesse volte invece d'interpretare $e_1\ e_2 \ldots e_r$ come coordinate cartesiane in uno spazio E_r, riesce più utile dare ad $e_1\ e_2 \ldots e_r$ il significato di coordinate omogenee

$$e_1 : e_2 : \ldots\ldots : e_r$$

in uno spazio S_{r-1} ad $r-1$ dimensioni. In tal caso l'immagine di un G_1 in G_r sarà data in

S_{r-1} da un punto, che rappresenterà anche se si vuole la trasformazione infinitesima $\Sigma e_i X_i f$ generatrice di G_1; un G_2 sarà rappresentato da una retta (un S_1); in generale un sottogruppo G_m di G_r da un S_{m-1}. - Possiamo ora facilmente ricercare a quali condizioni dovrà soddisfare un S_{m-1} di S_{r-1}, perchè rappresenti un sottogruppo (G_m) di G_r - In ogni caso un tale S_{m-1} rappresenterà una serie ∞^m di trasformazioni in G_r, e questa sarà un gruppo allora e allora soltanto quando sarà invariante rispetto alle proprie trasformazioni, secondo il teorema alla fine del § 58. Per il significato del gruppo aggiunto ciò equivale a dire: Affinchè un S_{m-1} di S_{r-1} rappresenti un sottogruppo G_m di G_r, è necessario e sufficiente che esso venga trasformato in se medesimo da quelle trasformazioni del gruppo aggiunto i cui punti immagine appartengono all'S_{m-1} stesso.

Naturalmente queste trasformazioni del gruppo aggiunto formeranno esse stesse in questo gruppo un sottogruppo con $m-1$ o meno parametri, secondo che il numero dei parametri nel gruppo aggiunto sarà r o inferiore.

In particolare se l'S_{m-1} considerato viene trasformato in se medesimo da tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto, esso rappresen-

sarà un sottogruppo G_m di G_r, e precisamente un sottogruppo invariante, cioè: I sottogruppi invarianti di G_r sono rappresentati in S_{r-1} da spazi lineari che costituiscono varietà invarianti del gruppo aggiunto.

In generale, se si conosce una varietà minima invariante del gruppo aggiunto in S_{r-1} i suoi punti rappresentano sottogruppi G_1 di G_r appartenenti al medesimo tipo.

Per determinare queste varietà si deve por mente che le coordinate $e_1\, e_2 \dots e_r$ sono omogenee e le varietà stesse debbono essere rappresentate da equazioni omogenee, cioè non debbono cangiare mutando $e_1\, e_2 \dots e_r$ in

(11) $\quad e_1' = \lambda e_1 \,,\quad e_2' = \lambda e_2, \dots \dots \; e_r' = \lambda e_r$

dove λ è un parametro qualunque. Le formole precedenti rappresentano in E_r un gruppo ad un parametro (un'omotetia rispetto all'origine) la cui trasformazione generatrice è data da

$$Ef = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + \dots + e_r \frac{\partial f}{\partial e_r}$$

Le varietà in discorso debbono dunque rimanere invarianti non solo per le r trasformazioni

$$E_i f = \sum_{jk}^{1\dots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$
$$(i = 1, 2 \dots r)$$

ma anche per la

$$Ef = \sum_k e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Ora si vede subito che aggregando alle $E_i f$ la Ef si hanno le trasformazioni generatrici di un gruppo in cui il gruppo aggiunto $(E_1 E_2 \dots E_r)$ è contenuto come sottogruppo invariante poichè si ha identicamente, come subito si verifica

$$(E E_i) = 0$$

Questa cosa del resto è evidente a priori, poichè qualunque trasformazione lineare omogenea è permutabile coll'omotetia.

Così adunque: Per trovare le varietà invarianti in S_{r-1} rispetto al gruppo aggiunto Γ_{r-m} basta aggregare alle trasformazioni infinitesime di Γ_{r-m} la

$$Ef = \sum_i e_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

e cercare nel modo ordinario (§47) le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$(E_1 E_2 \dots E_r E)$$

È bene osservare che questo gruppo è effettivamente più ampio del gruppo aggiunto e quindi contiene un parametro di più ($r-m+1$ parametri), giacchè la Ef non si compone linear-

-mente, con coefficienti costanti c_i, colle E_i. - In caso contrario si avrebbe infatti

$$(12) \qquad Ef = \sum_i c_i E_i f$$

e siccome si ha identicamente (§ 69)

$$\sum_i e_i E_i f = 0$$

si avrebbe anche per qualunque f

$$Ef = \sum_i (c_i - e_i) E_i f$$

Il secondo membro si annullerebbe per qualunque f per le $e_i = c_i$, mentre ciò non può accadere evidentemente del primo (*).

Aggiungiamo, senza dimostrarlo, che la (12) non può sussistere nemmeno con coefficienti c_i funzioni delle e, che cioè l'equazione $Ef = 0$ è indipendente dalle

$$E_1 f = 0 \;,\; E_2 f = 0 \;\ldots\ldots\; E_r f = 0$$

§ 71
Esempio del gruppo dei movimenti nel piano

Prima di procedere ad ulteriori ricerche sul gruppo aggiunto sarà bene applicare a qualche esem-

(*) Basta p. e. prendere per f una soluzione di $Ef = 1$

più semplice i risultati generali ottenuti.
Consideriamo il gruppo G_3 dei movimenti del piano le cui equazioni finite sono (§ 7)

$$(12)\quad \begin{cases} x_1' = x_1 \cos a_3 - x_2 \operatorname{sen} a_3 + a_1 \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} a_3 + x_2 \cos a_3 + a_2 \end{cases}$$

Le sue trasformazioni infinitesime generatrici sono

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

e una trasformazione infinitesima qualunque è data da

$$(13)\qquad e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

Per la (12) essa si trasforma in

$$e_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1'} \cos a_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \operatorname{sen} a_3\right) + e_2\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1'} \operatorname{sen} a_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \cos a_3\right) +$$
$$+ e_3\left\{(a_2 - x_2')\frac{\partial f}{\partial x_1'} - (a_1 - x_1')\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right\} =$$
$$= e_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + e_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} + e_3'\left(x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'} - x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'}\right)$$

dove

$$(14)\quad \begin{cases} e_1' = e_1 \cos a_3 - e_2 \operatorname{sen} a_3 + a_2 e_3 \\ e_2' = e_1 \operatorname{sen} a_3 + e_2 \cos a_3 - a_1 e_3 \\ e_3' = e_3 \end{cases}$$

Queste sono precisamente le trasformazioni del gruppo aggiunto che nel caso attuale ha tre parametri come il gruppo G_3 primitivo, ciò che era prevedibile essendo G_3 asistatico (§ 70).

Si osservi anzi che considerando $\frac{e_1}{e_3}$, $\frac{e_2}{e_3}$ come coordinate cartesiane ortogonali nel piano, il gruppo aggiunto Γ_3 è ancora il gruppo dei movimenti.

Le sue trasformazioni infinitesime si calcolano subito dalle (14) osservando che per

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

si ha l'identità e quindi per

$$a_1 = \varepsilon_1 \delta t\,,\quad a_2 = \varepsilon_2 \delta t\,,\quad a_3 = \varepsilon_3 \delta t$$

con $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ costanti arbitrarie la più generale trasformazione infinitesima — Per trasformazioni generatrici di Γ_3 possiamo prendere

$$(15)\qquad E_1 f = -e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}\,,\quad E_2 f = e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1}\,,\quad E_3 f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}$$

come risultano anche direttamente dalla formola generale (7) §. 69.

Prima di applicare i criterî generali stabiliti nei paragrafi precedenti alla classificazione in tipi delle trasformazioni di G_3 (movimenti) e sottogruppi, conviene ancora fare le osservazioni seguenti — Il simbolo

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$$

rappresenta anche una trasformazione finita del gruppo e importa riconoscere qual è il significato geometrico dei parametri $e_1\ e_2\ e_3$ — Ciò si può fare facilmente per via diretta, ma per

applicare le teorie generali ricorriamo alle equazioni differenziali (A) § 68 che danno le relazioni fra i parametri a_1, a_2, a_3 ed i parametri canonici $e_1 = \lambda_1 t$, $e_2 = \lambda_2 t$, $e_3 = \lambda_3 t$ -

Per il gruppo dei movimenti i valori dei coefficienti $\psi_{ik}(a)$ sono (v.e § 7 in fine)

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e quindi quelle delle $\alpha_{ik}(a)$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & -1 \end{vmatrix}$$

Le equazioni (A) dianzi citate diventano quindi nel caso nostro

$$\frac{da_1}{dt} = \lambda_1 + \lambda_3 a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = \lambda_2 - \lambda_3 a_1, \quad \frac{da_3}{dt} = -\lambda_3$$

colle condizioni iniziali

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad \text{per } t = 0$$

Ciò dà intanto $a_3 = -\lambda_3 t = -e_3$, onde si vede che quando e_3 non è nullo (o multiplo di 2π) rappresenta l'ampiezza della rotazione del movimento corrispondente. Se poi $e_3 = a_3 = 0$ il movimento è una traslazione; risulta

$$a_1 = e_1 \qquad a_2 = e_2$$

e quindi e_1 e_2 sono le componenti secondo gli assi di questa traslazione.

Per classificare in tipi le trasformazioni di G_3 basta determinare nello spazio E_3 le varietà minime invarianti rispetto a Γ_3. Ora la matrice dei coefficienti di E_1f, E_2f, E_3f è qui

$$\begin{vmatrix} 0 & -e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \\ -e_2 & -e_1 & 0 \end{vmatrix}$$

ed ha la caratteristica generica $=2$, salvo per $e_3=0$, ove la caratteristica diventa $=1$ (*)

In primo luogo il gruppo Γ_3 essendo intransitivo possiede l'invariante e_3, e le varietà minime invarianti corrispondenti sono i piani

$$e_3 = \text{cost.} \quad (\neq 0)$$

che rappresentano ciascuno un tipo di trasformazioni - Si conclude che sono affini due rotazioni della stessa ampiezza, ciò che è geometricamente evidente -

In secondo luogo il piano invariante

$$e_3 = 0$$

(*) La caratteristica diventa $=0$ per $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, ma questo punto (l'origine) rappresenta l'identità in G_3, trasformazione che è naturalmente affine solo a se medesima -

rappresenta le traslazioni - Su questo piano le $E_1 f$, $E_2 f$ si annullano identicamente e il gruppo Γ_3 si riduce alle rotazioni attorno all'origine. Esso possiede l'invariante $\sqrt{e_1^2+e_2^2}$ che rappresenta l'ampiezza della traslazione - Sono dunque affini nel gruppo due traslazioni d'eguale ampiezza - Dal punto di vista reale la discussione è completa - Ma se si vuole considerare anche l'immaginario, bisogna avvertire che i punti ciclici del piano $e_3=0$

$$e_1 : e_2 : e_3 = 1 : \pm i : 0$$

formano ciascuno per sè una varietà isolata invariante e danno luogo alle traslazioni singolari

$$x_1' = x_1 + t \quad , \quad x_2' = x_2 \pm it,$$

trasformate in sè medesime da ciascuna trasformazione del gruppo.

Venendo alla classificazione dei sottogruppi G_1, ed applicando quanto è detto alla fine del § 72, vediamo che si distinguono in due tipi, uno rappresentato in E_3 dalle rette per l'origine non giacenti nel piano $e_3=0$, l'altro dalle rette per l'origine in questo piano - Si vede subito che i primi sono sottogruppi rotatorii i secondi traslatorii, i primi come i secondi tutti affini fra loro -

§. 75
Applicazione al gruppo projettivo sopra una variabile

Prendiamo come secondo esempio il gruppo a tre parametri essenziali delle sostituzioni lineari sopra una variabile:

$$(15) \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

e cominciamo dal calcolare le trasformazioni infinitesime - Siccome nella (15) si ha l'identità facendo

$$\alpha = \delta \neq 0 \quad , \quad \beta = \gamma = 0$$

si avrà la più generale trasformazione infinitesima ponendo

$$\alpha = 1 + a\,\delta t \;,\; \beta = b\,\delta t \;,\; \gamma = c\,\delta t \;,\; \delta = 1 + d\,\delta t$$

con a, b, c, d costanti qualunque - La (15) diventa

$$x + \delta x = \frac{x + (ax+b)\delta t}{1 + (d + cx)\delta t}$$

$$\delta x = \frac{b + (a-d)x - cx^2}{1 + (d + cx)\delta t}\,\delta t$$

ossia trascurando le potenze superiori di δt

$$\delta x = \{ b + (a-d)x - cx^2 \}\,\delta t$$

e sotto altra forma

$$\delta x = (A + Bx + Cx^2)\,\delta t$$

con A, B, C costanti qualunque. La più generale trasformazione infinitesima del gruppo projettivo è dunque

$$(A+Bx+Cx^2)\frac{\partial f}{\partial x}\ ;\ ^{(*)}$$

esso è quindi generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1f=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_2f=x\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_3f=x^2\frac{\partial f}{\partial x}$$

Di queste calcoliamoci innanzi tutto le formole di composizione

$$(X_1X_2)=X_1f\ ,\ (X_1X_3)=2X_2f\ ,\ (X_2X_3)=X_3f,$$

onde deduciamo per le trasformazioni E_1f, E_2f, E_3f del gruppo aggiunto (§ 69)

$$\begin{cases} E_1f=-e_2\dfrac{\partial f}{\partial e_1}-2e_3\dfrac{\partial f}{\partial e_2} \\ E_2f=e_1\dfrac{\partial f}{\partial e_1}-e_3\dfrac{\partial f}{\partial e_3} \\ E_3f=2e_1\dfrac{\partial f}{\partial e_2}+e_2\dfrac{\partial f}{\partial e_3} \end{cases}$$

(*) È del resto ben noto che l'equazione differenziale di Riccati

$$\frac{dx'}{dt}=A+Bx'+Cx'^2,$$

detto x il valore iniziale di x' per $t=0$ ha un integrale generale lineare rispetto a x che qui figura come costante arbitraria, cioè appunto un integrale della forma (15) con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ funzioni di t. Ciò conduce in

Queste sono indipendenti e il gruppo aggiunto è un Γ_3 a tre parametri, corrispondentemente al fatto che il gruppo projettivo G_3 è assistatico -

Qui cerchiamo i sottogruppi ad uno e due parametri di G_3 - Per classificare quelli ad un parametro adoperiamo il processo del § 73 riguardando $e_1\ e_2\ e_3$ come coordinate omogenee nel piano.

Dovremo associare alle E_1f, E_2f, E_3f la

$$Ef = \sum e_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

e ricercare le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$\Gamma_4 = (E_1 E_2 E_3 E)$$

La matrice

$$\begin{Vmatrix} e_2 & 2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{Vmatrix}$$

ha la caratteristica 3 e Γ_4 è transitivo. Se eguagliamo a zero i minori di 3° ordine, escludendo naturalmente il caso $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, troviamo l'unica equazione

(16) $\qquad e_2^2 - 4e_1 e_3 = 0$

Dunque rispetto al gruppo aggiunto tutti i punti del piano sono equivalenti tranne i punti

altro modo ai risultati del testo -

della conica che sono equivalenti fra loro — I sottogruppi ad un parametro di G_3 si distinguono conseguentemente in due tipi, essendo affini quelli del primo al gruppo G_1 generato dalla $x\frac{\partial f}{\partial x}$ corrispondente a $e_1 = e_3 = 0$, e quelli del secondo al gruppo G_1 generato da $\frac{\partial f}{\partial x}$ corrispondente al punto $e_2 = e_3 = 0$ della conica. Le equazioni finite dei corrispondenti gruppi sono

$$x' = \lambda x$$

nel primo,

$$x' = x + a$$

nel secondo —

Per trovare anche i sottogruppi G_2 di G_3 si osservi che se

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$$

$$Yf = \varepsilon_1 X_1 f + \varepsilon_2 X_2 f + \varepsilon_3 X_3 f$$

sono le due trasformazioni infinitesime di G_2 si ha

$$(XY) = (e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1) X_1 f + 2(e_1 \varepsilon_3 - e_3 \varepsilon_1) X_2 f +$$

$$+ (e_2 \varepsilon_3 - e_3 \varepsilon_2) X_3 f = \eta_1 X_1 f + \eta_2 X_2 f + \eta_3 X_3 f$$

Essendo $(e_1\, e_2\, e_3)$, $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$ i punti rappresentativi di Xf, Yf rispettivamente, quello $(\eta_1\, \eta_2\, \eta_3)$ è il polo rispetto alla conica (16) della congiungente quei due punti. Ciò posto, un sottogruppo G_2 di G_3 deve avere per immagine nel piano

una retta che deve contenere tutti i punti immagine delle trasformazioni infinitesime di G_2. Qui adunque la retta congiungente i punti immagine di Xf e Yf deve contenere il proprio polo e per ciò deve toccare la conica (16). Poiché il gruppo aggiunto scambia fra loro transitivamente le tangenti della conica, vediamo che: Tutti i sottogruppi a due parametri del gruppo proiettivo sono affini.

Come rappresentante del tipo si può prendere il sottogruppo

$$x' = a_1 x + a_2$$

che lascia fisso il punto $x = \infty$ e così ogni altro sottogruppo G_2 lascia fisso un punto $x = \alpha$ ed è individuato da questo punto; la sua equazione finita è data da

$$\frac{1}{x'-\alpha} = \frac{a_1}{x-\alpha} + a_2$$

§ 76

Sottogruppi a due parametri di un gruppo G_3

Riprendiamo ora le considerazioni generali ed occupiamoci di un problema che conduce ad importanti risultati per la teoria dei gruppi, alla ricerca dei gruppi G_2 a due parametri

contenuti in un dato gruppo G_r -

In primo luogo vediamo quale composizione può offrire un gruppo G_2 a due parametri.

Siano X_1f, X_2f le due trasformazioni generatrici; avremo

$$(X_1X_2) = aX_1 + bX_2,$$

con a, b costanti. Se $a=0$, $b=0$ si ha $(X_1X_2)=0$ ed il gruppo è Abeliano. Supponendo che sia invece $a \neq 0$, basta sostituire alla X_1f la

$$\overline{X}_1 f = X_1 f + \frac{b}{a} X_2 f.$$

perchè ne risulti

$$(\overline{X}_1 f, X_2 f) = a\overline{X}_1 f$$

e alterando $X_2 f$ pel fattore $\frac{1}{a}$ si può anche rendere $a=1$. Dunque: un gruppo G_2 a due parametri può offrire o la composizione $(X_1X_2)=0$, o l'altra $(X_1X_2)=X_1f$. Nel primo caso il gruppo è Abeliano, nel secondo caso ha per gruppo derivato X_1f, quindi in ogni caso: un gruppo a due parametri è sempre integrabile.

Dimostriamo ora il teorema:

Ogni sottogruppo G_1 ad un parametro di un gruppo G_r è contenuto almeno in un sottogruppo G_2' a due parametri (reale od immaginario)(*).

(*) Se si ricorre alla rappresentazione del § 73

Sia $X_1 f$ la trasformazione generatrice di G_1 ed indichino

$$X_2 f, X_3 f \ldots\ldots X_r f$$

le rimanenti G_r. Basterà dimostrare che con queste ultime si può comporre linearmente una trasformazione

$$Yf = \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f,$$

prendendo le costanti λ non tutte nulle in guisa che si abbia

$$(17) \qquad (X_1 Y) = \alpha X_1 f + \beta Yf,$$

con α, β costanti. La (17) ci dà

$$\sum_i^{2\ldots r} \lambda_i (X_1 X_i) = \sum_{ik}^{1\ldots r} c_{1ik} \lambda_i X_k f = \alpha X_1 + \beta \sum_k^{2\ldots r} \lambda_k X_k f$$

e si scinde quindi nelle seguenti

$$\alpha = \sum_i^{2\ldots r} c_{1i1} \lambda_i$$

$$(18) \qquad \sum_i^{2\ldots r} c_{1ik} \lambda_i = \beta \lambda_k \quad (k = 2, 3 \ldots r)$$

La prima ci dà α note che siano le λ; le rimanenti $r-1$, lineari omogenee nelle λ, danno eliminando le λ l'equazione di grado $r-1$ in β

(*) dei sottogruppi di G_r nello spazio S_{r-1} a $r-1$ dimensioni, i sottogruppi G_2 sono rappresentati da rette e il teorema del testo ci dice che queste rette riempiono lo spazio, giacchè per ogni punto ne passa una almeno.

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} c_{122}-\beta & c_{132} \cdots\cdots & c_{1r2} \\ c_{123} & c_{133}-\beta \cdots\cdots & c_{1r3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{12r} & c_{13r} \cdots\cdots & c_{1rr}-\beta \end{vmatrix} = 0$$

Prendendo per β una radice qualunque di questa equazione, si può certamente soddisfare le (18) con valori non tutti nulli delle λ, onde risulta dimostrato il teorema – In generale si osservi che se quella radice β rende il determinante (19) di caratteristica $r-1-k$, ad altrettante equazioni distinte si ridurranno le (18) e però k delle λ resteranno arbitrarie, cioè vi saranno ∞^{k-1} sottogruppi G_2 contenenti il nostro G_1 –

Come è avvertito nell'enunciato del teorema può anche darsi che i sottogruppi G_2 contenenti il dato G_1 (reale) siano immaginarii perchè l'equazione (19) se di grado $r-1$ pari (cioè se r è impari) può avere tutte le radici immaginarie – Così p. e. se consideriamo nello spazio il gruppo G_3 di rotazioni attorno all'origine generato da

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

colla composizione

$$(X_1 X_2) = -X_3 f\,,\quad (X_2 X_3) = -X_1 f\,,\quad (X_3 X_1) = -X_2 f$$

si vede subito che non ammette sottogruppi reali a due parametri. Per cercarli basta vedere se ne esistano di contenenti p. e. $X_1 f$ giacchè evidentemente tutti i G_1 nel nostro gruppo sono affini.
Ora ponendo

$$(X_1, \lambda X_2 + \mu X_3) = \alpha X_1 + \beta(\lambda X_2 + \mu X_3)$$

e avendo riguardo alla composizione superiore si ha

$$-\lambda X_3 + \mu X_2 = \alpha X_1 + \beta\lambda X_2 + \beta\mu X_3$$

onde:

$$\alpha = 0 \qquad \mu = \beta\lambda \;, \quad \lambda = -\beta\mu$$

e perciò

$$\beta^2 = -1 \;, \quad \beta = \pm i \quad \text{ecc.}$$

Il teorema sopra dimostrato non è che un caso particolare del seguente, che per ora ci limitiamo ad enunciare:

Ogni sottogruppo G_m integrabile ad m parametri di un gruppo G_r è contenuto almeno in un sottogruppo G_{m+1} ad $m+1$ parametri.

Se il sottogruppo G_m non è integrabile il teorema non vale più in generale. Così per es. nel gruppo a 5 parametri

$$G_5 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

è contenuto il G_3 non integrabile

$$G_3 = \left(x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

---

e questo non è contenuto in alcun G_2 di G_r.

§ 77
L'equazione caratteristica

Prendiamo ora in G_r un G_1 generico e sia

$$\sum e_i X_i f = e_1 X_1 f + \ldots\ldots + e_r X_r f$$

la sua trasformazione generatrice. Cerchiamo di determinare i sottogruppi G_2 di G_r nei quali è contenuto il G_1 fissato. Dovremo determinare la seconda trasformazione generatrice

$$\sum \lambda_i X_i f$$

in guisa che le costanti λ siano proporzionali alle e_i e si abbia

$$(\sum e_i X_i f, \sum \lambda_k X_k f) = a \sum_s e_s X_s f + \rho \sum_s \lambda_s X_s f$$

con a, ρ costanti.

Se il G_2 da costruirsi non ha per gruppo derivato precisamente G_1 ($a \neq 0$, $\rho = 0$), potremo fare senz'altro $a = 0$, cangiando nel modo indicato al principio del paragrafo precedente, la seconda trasformazione senza cangiare la prima. Così la relazione precedente si riduce alla

$$(20) \qquad (\sum e_i X_i f, \sum \lambda_k X_k f) = \rho \sum_s \lambda_s X_s f$$

e, per quanto si è detto ora, discutendo la possibilità di soddisfare alla (20) con convenienti

valori delle λ (non proporzionali alle e) veniamo a risolvere il problema seguente: Determinare i sottogruppi G_2 di G_r nei quali è contenuto un dato sottogruppo $G_1 \equiv \Sigma e_i X_i f$, senza esserne il primo gruppo derivato.

Il primo membro della (20), a causa delle relazioni di composizione, si scrive

$$\sum_{iks} c_{iks}\, e_i \lambda_k X_s f$$

e, confrontato col secondo, dà luogo alle r relazioni lineari omogenee nelle λ.

$$(20^*) \qquad \sum_{ik} c_{iks}\, e_i \lambda_k = \rho \lambda_s \qquad (s = 1, 2 \ldots r)$$

Scriviamo queste più brevemente ponendo

$$(21) \qquad e_{ks} = \Sigma c_{iks}\, e_i$$

e allora le (20*) diventano

$$(22) \qquad \sum_k e_{ks} \lambda_k = \rho \lambda_s \qquad (s = 1, 2 \ldots r)$$

Osserviamo che le funzioni lineari omogenee e_{ks} delle e introdotte colle (21) non sono altro che i coefficienti delle trasformazioni infinitesime $E_k f$ del gruppo aggiunto, e infatti con queste notazioni si ha (cf. (7) § 69)

$$(23) \qquad E_k f = \sum_s e_{ks} \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

Eliminando dalle r equazioni lineari omogenee

(21) nelle $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ queste incognite, ne viene per ρ l'equazione di grado r

$$(24) \quad \Delta(\rho) = \begin{vmatrix} e_{11}-\rho & e_{12} & \dots & e_{1r} \\ e_{21} & e_{22}-\rho & \dots & e_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{r1} & e_{r2} & \dots & e_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

Il primo membro, cioè il determinante $\Delta(\rho)$ dicesi il determinante caratteristico e l'equazione stessa $\Delta(\rho)=0$ l'equazione caratteristica, ~~relativa~~ al sottogruppo $\Sigma e_i X_i f$. quando le e si lasciano variabili, si dicono poi rispettivamente il determinante caratteristico e l'equazione caratteristica del gruppo. Queste denominazioni saranno poi giustificate dalle proprietà che dimostreremo nei prossimi paragrafi -

Intanto osserviamo subito che l'equazione caratteristica ha sempre la radice $\rho=0$ poichè, a causa della intransitività del gruppo aggiunto (§ 64). il determinante $|e_{ik}| = \Delta(0)$ è certamente nullo (*).

Ma se prendiamo una radice ρ non nulla (supposta esistente) della equazione caratteristica, a questa corrisponde almeno una soluzione del problem.

(*) La stessa cosa risulta dall'osservare che si soddisfa certamente alla (20) e quindi alle (22) ponendo $\lambda_k = e_k$; $\rho=0$

perchè le corrispondenti d che soddisfano le (22) non possono riuscire proporzionali alle e; altrimenti a causa delle identità

$$\sum e_{ks} e_k = 0$$

ne verrebbe $\rho = 0$ - Così avremo, corrispondentemente a quella radice ρ, uno o infiniti sottogruppi G_2 in cui è contenuto G_1 (senza esserne il primo gruppo derivato(*)), secondo che quella radice ρ annullerà o non annullerà tutti i minori di 4° ordine (*).

Quanto alla radice $\rho = 0$ se essa non annulla i minori di 4° ordine di $\Delta(0)$ non vi corrisponde alcuna soluzione effettiva del problema perchè i valori delle d ne risultano unicamente proporzionali alle e. Ma se $\Delta(0)$ ha caratteristica $< r-1$, allora si hanno sempre altre soluzioni (per le d non proporzionali alle e).

Di qui si vede che: a) condizione necessaria e sufficiente affinchè il sottogruppo G_1 sia contenuto in un sottogruppo Abeliano G_2 è che il determinante caratteristico relativo a G_1 abbia per $\rho = 0$ una caratteristica $< r-1$.

Notiamo in fine come possa anche darsi che

(*) Più precisamente se quella radice ρ rende $\Delta(\rho)$ di caratteristica $r-s$, esisteranno ∞^{s-1} tali sottogruppi G.

il problema proposto non ammetta alcuna soluzione. Le considerazioni superiori fanno conoscere le condizioni a ciò necessarie e sufficienti che possiamo enunciare così: *b*) Un gruppo G_1 è contenuto solo in sottogruppi G_2 che hanno per gruppo derivato G_1 quando l'equazione caratteristica $\Delta(\rho)=0$ di G_1 ha l'unica radice $\rho=0$ e questa non annulla tutti i minori d'ordine $r-1$ di $\Delta(\rho)$.

Che un tale caso possa darsi, lo dimostra l'esempio del gruppo projettivo G_3 sopra una variabile (cf. § 75) colla composizione

$$(X_1X_2)=X_1f\ ,\quad (X_1X_3)=2X_2f\ ,\quad (X_2X_3)=X_3f$$

Qui abbiamo

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} -e_2-\rho & -2e_3 & 0 \\ e_1 & -\rho & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2-\rho \end{vmatrix}=0$$

che per $e_1=1$ $e_2=e_3=0$ ha l'unica radice $\rho=0$, ma questa non annulla tutti i minori di secondo ordine. In questo caso il gruppo $G_1\equiv X_1f$ è contenuto nel solo sottogruppo $G_2\equiv[X_1f, X_2f]$ di cui G_1 è il gruppo derivato.

§ 78
Proprietà dell'equazione caratteristica

Se si riflette al significato delle radici dell'equazione caratteristica s'intende facilmente che l'equazione stessa deve essere indipendente dalle r particolari trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots\ldots X_r f$$

scelte come radici del gruppo. Dimostriamo questa proprietà, che giustifica la denominazione d'equazione caratteristica, in modo rigoroso e diretto così. Supponiamo di sostituire alle r trasformazioni $X_i f$ le altre r indipendenti $X_i' f$ colle formole

$$(25) \qquad X_i' = \sum_s a_{is} X_s f$$

dove le a sono coefficienti costanti, soggetti alla sola condizione che il loro determinante $|a_{is}|$ non sia nullo. La trasformazione infinitesima generica

$$\sum_k e_k X_k f$$

si cangierà in

$$\sum_i e_i' X_i' f = \sum_{ki} a_{ik} e_i' X_k f$$

e si avranno quindi le formole

(26) $$e_k = \sum_i a_{ik}\, e'_i$$

Indichiamo con $E'_i f$ le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto calcolate rispetto alle trasformazioni generatrici $X'_i f$. Basta considerare che per la definizione stessa del gruppo aggiunto ad ogni trasformazione finita o infinitesima del gruppo primitivo ne corrisponde una perfettamente determinata del gruppo aggiunto per intendere che le $E'f$ si esprimeranno per le Ef come le $X'f$ per le X, cioè colle formole

(25*) $$E'_i f = \sum_s a_{is} E_s f$$

Colle notazioni del § precedente abbiamo

$$E_s f = \sum_k e_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

e analogamente

$$E'_i f = \sum_s e'_{is} \frac{\partial f}{\partial e'_s}$$

dove le e'_{is} sono costruite colle e'_λ e colle nuove costanti di composizione c'_{iks} come le e_{is} colle e_λ e colle c_{iks} secondo le (21).

Per la (26) la $E'_i f$ si scrive

$$E'_i f = \sum_{sk} e'_{is}\, a_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

onde sostituendo in (25*)

$$\sum_{sk} e'_{is}\, a_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k} = \sum_{sk} a_{is}\, e_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

e per ciò

$$(27) \qquad \sum_s a_{sk}\, e'_{is} = \sum_s a_{is}\, e_{sk}$$

$$(i, k = 1, 2 \dots r)$$

Indicando al solito con ε_{is} lo zero o l'unità secondo che $i \neq s$ o $i = s$, si vede subito che dalla (27) segue l'altra

$$(27^*) \qquad \sum_s a_{sk}(e'_{is} - \varepsilon_{is}\rho) = \sum_s a_{is}(e_{sk} - \varepsilon_{sk}\rho), \ (i, k = 1 \dots r)$$

dove ρ è un' indeterminata qualunque.

Ora il determinante caratteristico $\Delta(\rho)$ relativo alle $X_1 f \dots X_r f$ è

$$\Delta(\rho) = \left| e_{sk} - \varepsilon_{sk}\rho \right| ;$$

quello $\Delta'(\rho)$ relativo a $X'_1 f \dots X'_r f$ è

$$\Delta'(\rho) = \left| e'_{is} - \varepsilon_{is}\rho \right|$$

e dalle (27*) segue subito che questi due determinanti sono eguali (per qualunque valore di ρ). Infatti, se indichiamo per un momento con b_{ik} il valore comune del primo e secondo membro nelle (27), con B il determinante delle b_{ik}, con A quello delle a_{ik}, segue dalla (27*)

$$B = A\Delta(\rho) = A\Delta'(\rho)$$

e siccome $A \neq 0$

$$\Delta(\rho) = \Delta'(\rho) \qquad \text{c.d.d.}$$

Dunque:

Cangiando comunque le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo G_r, il determinante caratteristico $\Delta(\rho)$ non cangia.

§ 79

I coefficienti del polinomio $\Delta(\rho)$ come invarianti del gruppo aggiunto

Le radici non nulle dell'equazione caratteristica $\Delta(\rho)=0$ sono delle funzioni (algebriche) di $e_1\ e_2 \dots e_r$ ed è facile vedere a priori, almeno quando le radici sono tutte semplici, che esse sono invarianti del gruppo aggiunto. E infatti se ρ è una radice non nulla di $\Delta(\rho)$ relativa ad un G_1 generico generato da

$$Xf = \Sigma e_i X_i f$$

ciò vuol dire che esiste un secondo G_1' generato da una Yf tale che

$$(XY) = \rho Yf$$

Se trasformiamo $G_1 . G_1'$ con una medesima trasformazione T qualsiasi in G_r, le Xf, Yf si trasformeranno in $\bar{X}f$, $\bar{Y}f$ e si avrà ancora

$$(\bar{X}f, \bar{Y}f) = \rho \bar{Y}f$$

rimanendo ρ la stessa. Il trasformare per mez-

di una T equivale ad eseguire sulle e una trasformazione del gruppo aggiunto;

$$e'_i = \sum \rho_{ik} e_k ,$$

onde risulta

$$\rho(e_1 e_2 \dots e_r) = \rho(e'_1 e'_2 \dots e'_r) \quad \text{c. d. d.}$$

Sviluppando il polinomio $\Delta(\rho)$ di grado r in ρ scriviamo

$$(-1)^r \Delta(\rho) = \rho^r - \psi_1(e)\rho^{r-1} + \psi_2(e)\rho^{r-2} + \dots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(e)\rho ;$$

i coefficienti ψ sono funzioni razionali intere ed omogeneo delle $e_1 e_2 \dots e_r$ e precisamente $\psi_k(e)$ sarà una forma nelle $e_1 \dots e_r$ di grado $= k$. Da quanto si è visto sopra risulta che queste forme ψ sono altrettanti invarianti del gruppo aggiunto, come funzioni simmetriche elementari delle radici. Di questa proprietà importante (trovata da Killing) diamo una dimostrazione diretta, che vale comunque siano le radici, semplici o ~~multi~~ pile (dimostrazione di Engel) - Bisogna dunque provare che ciascun polinomio ψ è un invariante del gruppo aggiunto, che cioè soddisfa alle equazioni a derivate parziali

$$E_1\psi = 0 \quad E_2\psi = 0 \dots E_r\psi = 0$$

Per questo basterà provare che, restando ρ indeterminata, si ha

$$E_k \Delta(\rho) = 0 \qquad k = 1, 2 \dots r$$

indicando con

$$(28) \qquad \gamma_{ij} = e_{ij} - \rho\,\varepsilon_{ij}$$

l'elemento generico di Δ, abbiamo

$$E_k \Delta = \sum_s e_{ks} \frac{\partial \Delta}{\partial e_s} = \sum_{sij} e_{ks} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial e_s} = \sum_{sij} e_{ks} \frac{\partial e_{ij}}{\partial e_s} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}}$$

cioè per la (21)

$$E_k \Delta = \sum_{sij} c_{sij}\, e_{ks} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} = \sum_{sij\lambda} c_{\lambda ks}\, c_{sij}\, e_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}}$$

Ma, per le relazioni quadratiche fra le c (formola (1) § 24), si ha

$$\sum_s c_{\lambda ks}\, c_{sij} = \sum_s (c_{kis}\, c_{\lambda sj} + c_{skj}\, c_{\lambda is})$$

e per ciò

$$E_k \Delta = \sum_{sij\lambda} (c_{kis}\, c_{\lambda sj} + c_{skj}\, c_{\lambda is})\, e_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} =$$

$$= \sum_{sij} (c_{kis}\, e_{sj} + c_{skj}\, e_{is}) \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}}$$

Questa per la (28) si scrive

$$E_k \Delta = \sum_{sij} (c_{kis}\, \gamma_{sj} + c_{skj}\, \gamma_{is}) \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} +$$

$$+ \rho \sum_{sij} (c_{kis}\, \varepsilon_{sj} + c_{skj}\, \varepsilon_{is}) \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}}$$

Nella seconda somma il coefficiente di $\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}}$ è

$$\sum_s (c_{kis}\, \varepsilon_{sj} + c_{skj}\, \varepsilon_{is}) = c_{kij} + c_{ikj} = 0$$

ed anche la prima s'annulla come si vede osservando che si ha

$$\sum_j \gamma_{sj} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} = \varepsilon_{is} \Delta , \quad \sum_i \gamma_{is} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} = \varepsilon_{js} \Delta ,$$

onde la prima somma diventa

$$\sum_{is} (c_{kis} \varepsilon_{is} + c_{ski} \varepsilon_{is}) \Delta = \sum_i (c_{kii} + c_{iki}) \Delta = 0$$

Dunque si ha $E_k \Delta = 0$ $(k = 1, 2 \dots r)$ c. d. d.

Abbiamo quindi il teorema:

I coefficienti $\psi_1(e), \psi_2(e) \dots \psi_{r-1}(e)$ dell' equazione caratteristica sono altrettanti invarianti del gruppo aggiunto.

§ 80
Composizione (struttura) di un gruppo

Ci sarebbe impossibile sviluppare le numerose ed importantis conseguenze che derivano per la teoria generale dei gruppi continui dalla formazione dell'equazione caratteristica. Esse formano un ampio capitolo della teoria che trovasi sviluppata (con molte lacune nelle dimostrazioni) da Killing in tre successive memorie nei Math. Annalen (*), indi da Umlauf e Cartan nelle loro dissertazioni (**)

(*) Bd. 31, 33, 35.

(**) Umlauf – Ueber die Zusammensetzung der endli-

Ci limiteremo qui ad accennare alla classificazione che Killing ne ha tratto per i gruppi continui. Ma prima diciamo del significato dato da Lie al termine di composizione o struttura (Zusammensetzung) di un gruppo - La parte maggiore e più importante delle proprietà di un gruppo G_r generato da r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \dots X_r f$$

si trova dipendere unicamente dai valori delle costanti c_{iks} nelle relazioni fondamentali

$$(29) \qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

Così p. e. il gruppo aggiunto di G_r, l'esistenza dei sottogruppi di G_r e la loro divisione in tipi, le varie serie di composizione ed i loro indici dati dalle differenze

$$r - r_1\ ,\ r_1 - r_2 \dots$$

dipendono unicamente, come abbiamo visto, dalle costanti c_{iks} - Lie indica col nome di <u>composizione</u> del gruppo il complesso di quelle proprietà che dipendono solo dalle c_{iks}, e parla quindi di un gruppo di composizione (c_{iks}) - Bisogna subito osservare che vi sono infiniti sistemi di valori per le c_{iks} determinanti la medesima composizione, poichè questi valori dipendono dalle r trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f$

---

chen continuierlichen Transformationsgruppen (Leipzig 1891) -

<u>Cartan</u> - Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Paris - 1894) -

.....$X_r f$ scelte come generatrici del gruppo. Se cangiamo queste (come al § 78) con una sostituzione lineare

(30) $$X'_k f = \sum_i a_{ki} X_i f \qquad (k=1, 2 \dots r)$$

dove le costanti a_{ki} debbono solo avere un determinante $|a_{ki}| \neq 0$, ed indichiamo con c'_{iks} i valori delle costanti c relative alle $X'_i f$, le composizioni (c_{iks}) (c'_{iks}) sono identiche – È facile scrivere le formole che esprimono (linearmente ed omogeneamente) le c' per le c.

Avendosi infatti

$$(X'_i X'_k) = \sum_s c'_{iks} X'_s f$$

ed esprimendo le X' per le X colle (30), risulta

$$\left(\sum_j a_{ij} X_j f, \sum_\lambda a_{k\lambda} X_\lambda f\right) = \sum_s c'_{iks} \sum_\mu a_{s\mu} X_\mu f,$$

ossia

$$\sum_{j,\lambda} a_{ij} a_{k\lambda} (X_j, X_\lambda) = \sum_{j,\lambda,\mu} a_{ij} a_{k\lambda} c_{j\lambda\mu} X_\mu f =$$
$$= \sum_{s,\mu} c'_{iks} a_{s\mu} X_\mu f$$

e quindi

(31) $$\sum_s^{1\dots r} a_{s\mu} c'_{iks} = \sum_{j\lambda}^{1\dots r} a_{ij} a_{k\lambda} c_{j\lambda\mu}$$

$$i, k, \mu = 1, 2 \dots r$$

Se si indica con α_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante A delle a, diviso per A stesso, le precedenti, risolute rispetto alle c', danno

(32) $$c'_{ikl} = \sum_{j,\lambda,\mu} a_{ij} a_{k\lambda} \alpha_{l\mu} c_{ij\mu}$$

che sono le formole cercate.

§ 81

Le relazioni fra le c e le c' come individuanti un gruppo

Sussiste ora la seguente notevole proprietà:
Se nelle formole (32) riguardiamo le c'_{iks} non più come costanti, ma come r^3 variabili indipendenti, le formole stesse danno un gruppo di sostituzioni lineari omogenee su queste r^3 variabili coi r^2 parametri a_{ik} —

Si tratta dunque di provare che se si passa dalle c' alle c'' con una trasformazione come la (31) coi nuovi parametri b_{ik}, sia

$$(33) \qquad \sum_l b_{ls}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{i,k} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, c'_{iks}$$

eliminando le c' fra le (31) (33) si otterranno relazioni della forma

$$(34) \qquad \sum_l \gamma_{l\mu}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{j\lambda} \gamma_{\alpha j}\, \gamma_{\beta\lambda}\, c_{j\lambda\mu}$$

dove le costanti γ_{ik} dipendono solo dalle a, b.

Per dimostrarlo si moltiplichi la (33) per $a_{s\mu}$ e si sommi rispetto ad s; ne risulta per la (31)

$$\sum_{s,l} a_{s\mu}\, b_{ls}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{iks} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, a_{s\mu}\, c'_{iks} =$$

$$= \sum_{ikj\lambda} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, a_{ij}\, a_{k\lambda}\, c_{j\lambda\mu}\,.$$

che si può scrivere

$$\sum_l c''_{\alpha\beta l}\left(\sum_s a_{s\mu} b_{ls}\right) = \sum_{j\lambda}\left(\sum_i a_{ij} b_{\alpha i}\right)\left(\sum_k a_{k\lambda} b_{\beta k}\right) \cdot c_{j\lambda\mu}$$

e basta porre

$$\gamma_{l\mu} = \sum_s a_{s\mu} b_{ls}$$

per dedurne appunto la (34)

$$\sum_l \gamma_{l\mu} c''_{\alpha\beta l} = \sum_{j\lambda} \gamma_{\alpha j} \gamma_{\beta\lambda} c_{j\lambda\mu}$$

Supponiamo ora che le c_{iks} siano legate dalle equazioni (I) § 24

$$(I)\left\{\begin{array}{l} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_s^{1\dots r} \left(c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}\right) = 0 \; ; \end{array}\right.$$

è facile vedere che anche le c' definite dalle (31) o (32) soddisferanno le medesime equazioni (I) - E invero, pel terzo teorema fondamentale, soddisfacendo le c alle (I), esiste un gruppo

$$G_r = (X_1 X_2 \dots\dots X_r)$$

di composizione (c_{iks}) - Ma sostituendo alle $X_i f$ le $X'_i f$ colle (30) le c diventano le c'; queste soddisfano per ciò le (I) -

Dunque: Il gruppo continuo sulle c_{iks} definite dalle (31) trasforma in se medesimo il sistema (I)

Se interpretiamo le c_{iks} come r^3 variabili omogeneo in uno spazio lineare S_{r^3-1}, le (I) definiscono una certa varietà che indichiamo con V e l'osservazione

fatta equivale a dire che il gruppo Γ_{r^2} di collineazioni (31), a r^2 parametri, trasforma in se medesima questa varietà V che è adunque invariante rispetto a Γ_{r^2}. -

Ogni punto P di questa varietà V rappresenta una composizione di un gruppo a r parametri; due punti rappresenteranno la medesima composizione quando siano equivalenti rispetto a Γ_{r^2}.

Per determinare adunque tutte le possibili composizioni dei gruppi a r parametri basterà definire entro V le varietà minime invarianti rispetto a Γ_{r^2}; di ciascuna di queste varietà si prenda un punto e si avranno così tutte le possibili composizioni cercate - Siccome del gruppo Γ_{r^2} si hanno le equazioni (32) in termini finiti applicando i risultati del § 45, vediamo che:

La determinazione di tutte le possibili composizioni dei gruppi a r parametri si fa con sole operazioni algebriche.

§ 82
Genere di un gruppo.

Ritorniamo ora alla equazione caratteristica. Essa dipende unicamente dalla composizione del gruppo (§ 78) e così le radici stesse della equa-

zione, il loro grado di moltiplicità, la caratteristica che riceve per ognuna di esse il determinante $\Delta(\rho)$ ecc. sono tutti elementi inerenti alla composizione del gruppo. Killing ha fissato particolarmente l'attenzione sui coefficienti

$$\psi_1(e)\ ,\ \psi_2(e)\ \dots\dots\ \psi_{r-1}(e)$$

di $\Delta(\rho)$ che sono forme nelle $e_1\, e_2 \dots e_r$ e danno altrettanti invarianti del gruppo aggiunto - Fra questi (particolari invarianti) del gruppo aggiunto se ne farà un certo numero, diciamo p, di indipendenti - Il numero p si chiama il genere del gruppo (Rang secondo Killing). Dunque: Il genere p di un gruppo è il numero delle funzioni indipendenti nella serie

$$\psi_1(e)\ ,\ \psi_2(e)\ \dots\dots\ \psi_{r-1}(e)\,.$$

Naturalmente il genere di un gruppo non può superare il numero totale degli invarianti del gruppo aggiunto, cioè delle soluzioni indipendenti del sistema

$$E_1 f = 0 \quad E_2 f = 0 \quad \dots\dots\ E_r f = 0$$

Se la caratteristica del determinante delle e_{ik} cioè di $\Delta(0)$ è $= q$, quest'ultimo numero è precisamente $r-q$, onde

$$p \leq r-q$$

D'altronde essendo nulli in $\Delta(0)$ tutti i minori d'ordine $q+1$ e superiori, si ha evidente-

mente

$$\psi_{q+1}(e)=0, \;\ldots\; \psi_{r-2}(e)=0, \;\psi_{r-1}(e)=0$$

onde l'equazione caratteristica ha almeno $r-q$ radici nulle. Ne segue:

Il genere di un gruppo non può superare il numero delle radici nulle nell'equazione caratteristica.

Meritano particolare menzione i gruppi di genere zero; essi sono caratterizzati dalla proprietà seguente: Un gruppo è di genere zero allora ed allora soltanto quando tutti i suoi sottogruppi a due parametri sono Abeliani.

Difatti l'essere il gruppo di genere zero significa che tutti i coefficienti

$$\psi_1(e), \;\psi_2(e) \;\ldots\; \psi_{r-1}(e)$$

di $\Delta(\rho)$ sono zero e l'equazione caratteristica ha quindi l'unica radice $\rho=0$. Ora prendiamo in G_r un sottogruppo qualunque a due parametri. Scegliendo convenientemente le due trasformazioni generatrici X_1f, X_2f di questo G_2, la sua composizione è data (§ 76) da

$$(X_1X_2)=\rho X_2 f$$

dove $\rho=0$ se il gruppo G_2 è Abeliano e $\rho\neq0$ nel caso contrario. In ogni caso ρ è una radice dell'equazione caratteristica relativa ad X_1f e perciò è sempre $\rho=0$ quando il gruppo è di genere zero. L'inversa è pure evidente.

Secondo Umlauf i gruppi di genere zero sono sempre integrabili; non viceversa per ogni gruppo integrabile è zero il genere, ma se ciò non è pel gruppo ha luogo almeno pel suo gruppo derivato che possiede al massimo $r-2$ parametri.

Accenniamo da ultimo alle importanti ricerche di Killing sui gruppi semplici, confermate poi ed in parte rettificate da Cartan - Egli ha trovato che all'infuori di quattro grandi classi di gruppi semplici (projettivi) scoperti da Lie (e di cui tratteremo nel seguito di questi studi), nei quali il numero dei parametri resta indeterminato, esistono solo cinque gruppi semplici rispettivamente con

$$14,\ 52,\ 78,\ 133,\ 248$$

parametri -

Qui limitiamoci ad osservare che la ricerca dei gruppi semplici G_r a r parametri si riduce immediatamente a quella dei gruppi Γ_r semplici di sostituzioni lineari omogenee a r variabili, cioè dei gruppi projettivi semplici a r parametri nell'S_{r-1} - Infatti il gruppo aggiunto di un gruppo semplice ha necessariamente tanti parametri quanti il gruppo ed è quindi un Γ_r, poichè un G_r semplice non ha sottogruppi invarianti e tanto meno un sotto-

gruppo commutativo (cf. § 67)

Capitolo VIII°

Prime ricerche sulla simiglianza dei gruppi - Trasformazioni permutabili con tutte le trasformazioni di un gruppo - Gruppi semplicemente transitivi reciproci -

§ 88
Simiglianza dei gruppi

Abbiamo già definito al paragrafo 9 la simiglianza di due gruppi - Due gruppi G_r, Γ_r, sullo stesso numero n di variabili $(x_1 x_2 \dots x_n)$, $(y_1 y_2 \dots y_n)$ e collo stesso numero r di parametri, le cui equazioni finite siano rispettivamente

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1 \dots a_r)$$
$$y_i' = \varphi_i(y_1, y_2 \dots y_n ; b_1 \dots b_r)$$

si dicono simili quando è possibile, ponendo i parametri b uguali a certe funzioni dei parametri a, di trovare poi una trasformazione sulle variabili

$$x_i = \theta_i(y_1\, y_2 \cdots y_n)$$
$$x_i' = \theta_i(y_1'\, y_2' \cdots y_n')$$

tale che le equazioni finite dell'uno gruppo si trasformino in quelle dell'altro -

Stabilire i criterii per riconoscere la simiglianza di due gruppi è, come si intende, un problema fondamentale della nostra teoria che conviene saper risolvere - Intanto si può cominciare dal semplificare grandemente il problema, riportando la questione dalle equazioni finite dei due gruppi alle loro rispettive trasformazioni infinitesime generatrici

Siano

per G_r ..... $X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(k = 1, 2 \dots r)$

per Γ_r ..... $Y_k f = \sum_i^{1\dots n} \eta_{ki}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$ $(k = 1, 2 \dots r)$

le rispettive trasformazioni infinitesime generatrici - Se la trasformazione

$T)$ $\qquad x_i = \theta_i(y_1\, y_2 \cdots y_n)$

sulle varie cifre cangia G_r in Γ_r, dovrà cangiare ogni sottogruppo G_1 ad un parametro dell'uno in un analogo sottogruppo Γ_1 dell'altro e per ciò la trasformazione infinitesima generatrice di G_1 in quella di Γ_1 - e ne segue che per la T ogni trasformazione $X_k f$ deve mutarsi in una combinazione lineare $Z_k f$, a coefficienti costanti di $Y_1 f \dots Y_r f$

diciamo

$$(\alpha) \qquad Z_k f = \sum_j^{1\dots r} a_{kj} X_j f,$$

dove il determinante $|a_{kj}|$ sarà $\neq 0$ - Viceversa se la T cangia ogni $X_k f$ in una $Z_k f$, data dalle (α), cangierà anche ogni sottogruppo G_1 di G_r in un sottogruppo Γ_1 di Γ_r e quindi G_r in Γ_r, come si vede subito paragonando le equazioni canoniche dei due gruppi - Abbiamo dunque intanto:

Affinchè i due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r) \qquad X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r) \quad , \quad Y_k f = \sum_i \eta_{ki}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

siano simili, è necessario e sufficiente che esista una trasformazione

$$T) \qquad x_i = \theta_i(y_1 y_2 \dots y_n)$$

che cangi le r trasformazioni infinitesime $X_k f$ di G_r in r trasformazioni infinitesime $Z_k f$ di Γ_r, combinazioni lineari delle $Y_i f$.

Se esiste una tal trasformazione T e si suppone

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

sarà anche

$$(Z_i Z_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} Z_s f \;;$$

per conseguenza i due gruppi G_r, Γ_r sono certo di eguale composizione -

Dunque: Condizione necessaria (non sufficiente

perchè due gruppi siano simili è che siano egualmente composti -

La prima cosa da farsi per decidere della simiglianza di due gruppi è di riconoscere se essi sono egualmente composti, ciò che si fa con sole operazioni algebriche. Il problema è infatti questo di determinare, se sarà possibile, le r^2 costanti a_{ik} delle (d) in guisa che le $Z_1 f \ldots\ldots Z_r f$ offrano la medesima composizione di $X_1 f \ldots\ldots X_r f$ -

Se supponiamo

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

$$(Y_i Y_k) = \sum_s \gamma_{iks} Y_s f.$$

(*) Che la condizione non sia sufficiente lo dimostra il seguente semplice esempio - I due gruppi

$$G_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \qquad \Gamma_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

sono egualmente composti (Abeliani) - Ma le loro equazioni in termini finiti

$$G_2) \begin{cases} x_1' = x_1 + a_1 \\ x_2' = x_2 + a_2 \end{cases} \qquad \Gamma_2) \begin{cases} x_1' = x_1 + b_2 x_2 + b_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

fanno subito vedere che non sono simili perchè pel secondo si ha il sistema invariante delle rette $x_2 = \text{cost.}$ mentre pel primo non si ha un tale sistema di linee. Del resto senza ricorrere alle equazioni in termini finiti, si rileva dalle loro trasformazioni infinitesime che il primo è transitivo, il 2° intransitivo, ciò che esclude la simiglianza -

il calcolo eseguito al § 80 dà per le incognite a_{ki} le r^3 equazioni

$$\sum_{j\lambda}^{1\ldots r} a_{ij}\, a_{k\lambda}\, \gamma_{j\lambda\mu} = \sum_{s}^{1\ldots r} a_{s\mu}\, c_{iks}$$

$$(i, k, \mu = 1, 2 \ldots r)$$

È questo sistema di equazioni (quadratiche) nelle $\underline{a}$ che converrà discutere per risolvere la nostra questione preliminare.

E potrà darsi che il sistema sia assurdo, ovvero determini le $\underline{a}$, o ne lasci un certo numero indeterminato.

Dopo ciò il problema è ridotto evidentemente al seguente:

A) Dati due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \ldots X_r)$$
$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \ldots Y_r)$$

rispettivamente sulle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$; $y_1 y_2 \ldots y_n$, che siano egualmente composti:

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f\,,$$

riconoscere se esiste una trasformazione

$$T) \qquad x_i = \theta_i(y_1 \ldots y_n)$$

che cangi le $X_1 f \ldots X_r f$ rispettivamente in $Y_1 f \ldots Y_r f$.

§ 84

Caso in cui la condizione d'eguale composizione è sufficiente

Vi ha un caso molto importante e semplice nel quale basta l'eguaglianza di composizione per concludere la somiglianza dei gruppi, nel quale cioè la risposta al problema A) testè enunciato è sempre affermativa -

Basta per ciò che per l'uno e per l'altro gruppo la dimensione della varietà minima invariante relativa ad un punto qualunque dello spazio eguagli il numero r dei parametri, che cioè le due matrici

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x), & \xi_{12}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x), & \xi_{22}(x) & \dots & \xi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x), & \xi_{r2}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} \eta_{11}(y) & \dots & \eta_{1n}(y) \\ \eta_{21}(y) & \dots & \eta_{2n}(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{r1}(y) & \dots & \eta_{rn}(y) \end{Vmatrix}$$

per valori generici delle x e delle y abbiano per caratteristica r (§ 46) - Ciò richiede naturalmente che sia $n \geq r$ -

Bisogna dunque mostrare che in tale caso, e supposte soddisfatte le condizioni di eguale composizione enunciate in A):

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f \quad , \quad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f \, ,$$

esiste una trasformazione

$$(1) \quad y_i = \Phi_i(x_1, x_2 \dots x_n)$$

che cangia le $X_k f$ nelle $Y_k f$.

Siccome trasformando risulta

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} X_k(\Phi_i)\frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e d'altronde

$$Y_k f = \sum_i^{1\dots n} \eta_{ki}(y)\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_i^{1\dots n} Y_k(y_i)\frac{\partial f}{\partial y_i},$$

ne segue che la (1) trasformerà le $X_k f$ nelle $Y_k f$ solo quando in forza delle (1) sussistano identicamente le relazioni

$$(2) \quad X_k(\Phi_i) - Y_k(y_i) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Ora se, indicando con F una funzione qualunque delle x e delle y, poniamo

$$\Omega_k F = X_k F + Y_k F,$$

abbiamo

$$\Omega_k(\Phi_i - y_i) = X_k(\Phi_i) - Y_k(y_i)$$

e le due equivalgono quindi alle

$$(2^*) \quad \Omega_k(\Phi_i - y_i) = 0$$

Questo significa (§ 44) che il sistema di equazioni (1) nelle $2n$ variabili x, y deve ammettere le r trasformazioni infinitesime

$$\Omega_1 F, \ \Omega_2 F, \dots \dots \Omega_r F$$

Queste d'altronde, a causa delle relazioni di composizione

$$(\Omega_i \Omega_k) = \sum_s c_{iks}\Omega_s f$$

generano un gruppo G_r in quelle $2n$ variabili. Possiamo dunque dire che la trasformazione (1) cangierà le $X_k f$ nelle $Y_k f$ solo quando le (1) nello spazio $S_{2n} \equiv (x_1 x_2 \dots x_n ; y_1 y_2 \dots y_n)$ rappresentino una varietà V_n invariante rispetto al gruppo

$$G_r \equiv (\Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_r)$$

Siccome la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} & \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} & \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rn} & \eta_{r1} & \eta_{r2} & \dots & \eta_{rn} \end{matrix} \right\|$$

nei punti della varietà (1) che cerchiamo deve essere di caratteristica r (poichè in quei punti sono di caratteristica $\leq r$ le matrici parziali $|\xi_{ik}|$, $|\eta_{ik}|$ ed in quei punti nè le x sono legate fra loro nè le y), se applichiamo il teorema alla fine del § 47, vediamo che le equazioni (1) debbono potersi porre sotto la forma di n relazioni fra gli invarianti di G_r - Viceversa ogni tale sistema di relazioni che sia risolubile così rispetto alle x, così rispetto alle y, darà una trasformazione (1) della specie voluta -

Ora gli invarianti di G_r sono le $2n-r$ soluzioni indipendenti del sistema completo

(3) $\qquad \Omega_i F = X_i F + Y_i F = 0 \qquad (i=1, 2 \dots r)$;

queste possono scegliersi evidentemente in guisa che le prime $n-r$

$$u_1(x)\,,\ u_2(x)\cdots\cdots u_{n-r}(x)$$

siano funzioni delle sole x, le seguenti $n-r$

$$v_1(y)\,,\ v_2(y)\,\cdots\cdots v_{n-r}(y)$$

delle sole y, onde le r rimanenti

$$w_1(x,y)\ ,\ w_2(x,y)\cdots\cdots w_r(x,y)$$

contengono ciascuna necessariamente sì le x che le y.

Importa poi osservare che gli n invarianti

$$u_1(x)\,,\ u_2(x)\cdots\cdots u_{n-r}(x)\,,\ w_1(x,y)\cdots\cdots w_r(x,y)$$

sono indipendenti rispetto alle n x e così

$$v_1(y)\,,\ v_2(y)\cdots\cdots v_{n-r}(y)\,,\ w_1(x,y)\cdots\cdots w_r(x,y)$$

rispetto alle n y, ossia che i determinanti funzionali

$$\frac{\partial(u_1, u_2 \cdots u_{n-r}, w_1 \cdots w_r)}{\partial(x_1, x_2 \cdots x_n)}$$

$$\frac{\partial(v_1, v_2 \cdots v_{n-r}, w_1 \cdots w_r)}{\partial(y_1, y_2 \cdots y_n)}$$

sono ambedue diversi da zero. Per dimostrarlo basta osservare che le (3) sono risolubili rispetto ad r delle derivate $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$ e così rispetto ad r delle derivate $\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial y_n}$. Se per fissare le idee supponiamo p. e. che lo siano rispetto a $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_r}$, si sa che le $2n$ funzioni

$$u_1\,, u_2 \cdots u_{n-r}\,,\ v_1, v_2 \cdots v_{n-r}\,,\ w_1\ w_2 \cdots w_r\,,\ x_1 \cdots x_r$$

sono certo indipendenti (*), ossia le $2n-r$

(*) Ricordiamo brevemente la dimostrazione. Se si avesse identicamente

lo sono rispetto a $u_1\ u_2 \ldots\ldots u_{n-r}\ \ v_1\ v_2 \ldots\ldots v_{n-r}\ \ w_1\ w_2 \ldots\ldots w_r$

$x_{r+1},\ x_{r+2} \ldots\ldots x_n\ \ y_1 \ldots\ldots y_n$;

in altre parole è

$$\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots u_{n-r}; v_1, v_2 \ldots v_{n-r}; w_1\, w_2 \ldots w_r)}{\partial(x_{r+1} \ldots x_n, y_1\, y_2 \cdots y_n)} \neq 0.$$

Ma siccome le $\underline{u}$ dipendono solo dalle x e le $\underline{v}$ dalle sole y, questo determinante funzionale si risolve, come subito si vede, nel prodotto dei due

$$\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots\ldots u_{n-r})}{\partial(x_{r+1} \ldots\ldots\ldots x_n)}, \quad \frac{\partial(v_1\, v_2 \ldots v_{n-r}\, w_1 \ldots w_r)}{\partial(y_1\, y_2 \cdots y_n)};$$

l'uno e l'altro è dunque diverso da zero, in particolare il secondo, c.d.d.

Ciò posto, dovendo pel nostro oggetto stabilire fra le u, v, w un tale sistema di $\underline{n}$ relazioni che sia risolubile tanto rispetto alle x che alle y, le proprietà sopra osservate dimostrano che esso deve potersi risol

$$(\beta) \qquad F(u_1 \ldots u_{n-r}\ v_1 \ldots v_{n-r}\ w_1 \ldots w_r\ x_1 \ldots x_r) = 0$$

applicandovi l'operazione Ω_k verrebbe

$$\Omega_k F = \sum_j^{1\ldots r} \frac{\partial F}{\partial x_j} \Omega_k x_j = \sum_j^{1\ldots r} \xi_{kj} \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

$$k = 1, 2 \ldots r$$

e poichè per ipotesi $\begin{vmatrix} \xi_{11} \ldots & \xi_{1r} \\ \ldots & \ldots \\ \xi_{r1} \ldots & \xi_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, sarebbero nulle $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F}{\partial x_r}$, cioè la (β) legherebbe le u, v, w che sono invece indipendenti.

vece tanto rispetto alle v, w che alle u, w.(*)

Il sistema di equazioni richieste avrà dunque la forma

$$(1.)\begin{cases} v_1 = \theta_1(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}),\ v_2 = \theta_2(u_1 \dots u_{n-r}) \dots\dots v_{n-r} = \theta_{n-r}(u_1 \dots u_{n-r}) \\ w_1 = \psi_1(u_1 \dots\dots u_{n-r}),\ w_2 = \psi_2(u_1 \dots u_{n-r}) \dots\dots w_r = \psi_r(u_1 \dots u_{n-r}), \end{cases}$$

dove le funzioni $\theta_1\ \theta_2 \dots \theta_{n-r}$ sono $n-r$ funzioni indipendenti degli argomenti u (**), mentre le ψ sono affatto arbitrarie -

Così è dimostrato in effetto l'esistenza di trasformazioni (4) che cangiano le $X_k f$ nelle $Y_k f$; come si vede, la loro forma generale (4) contiene n funzioni arbitrarie -

---

(*) Se le dette relazioni fra le u, v, w sono

$$F_i(u, v, w) = 0$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

perchè il sistema sia risolubile p. e. rispetto alle x bisogna che sia

$$\frac{\partial(F_1 F_2 \dots F_n)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)} \neq 0\ ;$$

ma questo determinante è il prodotto dei due

$$\frac{\partial(F_1\, F_2 \dots F_n)}{\partial(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}\, w_1 \dots w_r)}\ ,\quad \frac{\partial(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}\, w_1 \dots w_r)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)}$$

onde il primo deve essere $\neq 0$ come il secondo.

(**) Le θ debbono essere indipendenti affinchè il sistema (4) sia risolubile rispetto alle u. w.

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \ldots\ldots X_r)\ ,\quad X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \ldots\ldots Y_r)\ ,\quad Y_k f = \sum_i^{1\ldots n} \eta_{ki}(y)\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

due gruppi d'eguale composizione

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f\ ,\quad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f$$

e cerchiamo se possono esistere trasformazioni (1)

$$(1)\qquad y_i = \Phi_i(x_1\, x_2 \ldots x_n)\,,$$

che cangino rispettivamente le $X_k f$ nelle $Y_k f$. In primo luogo tante debbono essere le trasformazioni

$$X_1 f\,,\ X_2 f \ldots X_r f$$

assolutamente indipendenti (cioè non legate da identità lineari a coefficienti variabili) quante le corrispondenti

$$Y_1 f\,,\ Y_2 f \ldots Y_r f\,,$$

cioè le due matrici

$$\left|\xi_{ik}\right| \qquad \left|\eta_{ik}\right|$$

debbono avere la medesima caratteristica generica q.(*)

Avendo già trattato (al §84) il caso $q = r$, supponiamo ora

$$q < r$$

(*) La stessa cosa si vede ricordando che la caratteristica q della matrice $\left|\xi_{ik}\right|$ dà la dimensione della varietà minima invariante rispetto a G_r, che deve manifestamente eguagliare la dimensione della varietà minima invariante rispetto a Γ_r.

e per fissare le idee supponiamo che le prime q ecc. le X_f siano assolutamente indipendenti, mentre le seguenti

$$X_{q+1}f \;\ldots\ldots X_r f$$

si esprimono per $X_1 f \ldots X_q f$ colle formole (cf. §§ 40 e 53)

$$(5) \qquad X_{q+j} f = \varphi_{j1}(x) X_1 f + \varphi_{j2}(x) X_2 f + \cdots + \varphi_{jq}(x) X_q f$$

$$j = 1, 2 \ldots r-q$$

ove le $\varphi_{jk}(x)$ sono funzioni delle x.

Se esiste la trasformazione cercata saranno

$$Y_1 f, \; Y_2 f \ldots Y_q f$$

fra loro assolutamente indipendenti mentre si avrà

$$(5^*) \qquad Y_{q+j} f = \psi_{j1}(y) Y_1 f + \psi_{j2}(y) Y_2 f + \cdots + \psi_{jq}(y) Y_q f$$

$$j = 1, 2 \ldots r-q$$

colle ψ funzioni delle y. Perchè la (1) cangi le X_f nelle corrispondenti Y_f è manifestamente necessario che in forza delle (1) sussistano le $q(r-q)$ relazioni

$$(6) \qquad \varphi_{jk}(x_1 \ldots x_n) = \psi_{jk}(y_1 \ldots y_n)$$

$$j = 1, 2, \ldots r-q, \quad k = 1, 2 \ldots q,$$

ciò che richiede in primo luogo che queste equazioni siano fra loro compatibili e non diano luogo né a relazioni fra le sole x, né a relazioni fra le sole y.

Intanto dunque il numero delle (6) effettivamente

indipendenti deve ridursi $\leq n$.

Abbiamo dunque il risultato:

B) Se esiste una trasformazione che cangia X_1f, X_2f ... X_rf rispettivamente in Y_1f, Y_2f ... Y_rf e fra le X_1f ... X_rf solo le prime q sono assolutamente indipendenti mentre le rimanenti si esprimono linearmente per queste colle formole (5), lo stesso deve accadere per le Yf, le ultime $r-q$ delle quali dovranno esprimersi per Y_1f ... Y_qf con formole come le (5*), essendo Y_1f ... Y_qf assolutamente indipendenti. Inoltre il sistema delle $q(r-q)$ equazioni (6) dovrà costituire un sistema compatibile e non dar luogo nè a relazioni fra le sole x, nè a relazioni fra le sole y.

§ 87

Caso di due gruppi asistatici

Queste condizioni così trovate come necessarie sono in effetto anche sufficienti per l'esistenza delle cercate trasformazioni, cioè per la simiglianza dei gruppi. Ma la dimostrazione di questo risultato generale rimanderemo ad un prossimo capitolo (Cap. VIII) quando le nuove nozioni sull'isomorfismo dei gruppi permetteranno di dare alla dimostrazione stessa una forma più semplice ed intuitiva. Per ora ci limiteremo a trattare il caso in

cui le (6) determinano già completamente la trasformazione stessa. Intanto cominciamo dall'osservare che, se le equazioni (6) debbono soddisfare alle condizioni enunciate, tante debbono essere le funzioni φ fra loro indipendenti quante le ψ. Il numero delle φ indipendenti serve, come sappiamo dal § 53, a distinguere se il gruppo è sistatico od asistatico, verificandosi il primo caso se questo numero è $< n$ il secondo se è $= n$ - Ciò che ora abbiamo detto equivale ad asserire che due gruppi simili sono sempre insieme sistatici od insieme asistatici ed anzi nel primo caso le varietà sistatiche corrispondenti hanno la medesima dimensione; tutto ciò è geometricamente evidente -

Il caso che tratteremo per ora è quello dei gruppi asistatici, dove appunto le (6), essendo in numero di n indipendenti, determinano completamente la trasformazione. Così colla nuova ricerca, e con quella già compiuta al § 84, avremo risoluto il problema nei due casi estremi in cui le (6) si riducono ad n indipendenti o spariscono affatto, cioè i casi di due gruppi asistatici o di due gruppi sistatici in cui le varietà sistatiche hanno la dimensione dello spazio ambiente -

Supponiamo adunque soddisfatte tutte le condizioni B) del paragrafo precedente ed inoltre che i

due gruppi siano assistatici, cioè le (6) si riducano ad n indipendenti; dimostriamo allora che effettivamente la trasformazione individuata dalle (6) cangierà $X_k f$ in $Y_k f$ $(k=1,2\ldots r)$.

Perciò, secondo le osservazioni fondamentali del § 84, basterà provare che il sistema di equazioni (6) ammetterà le r trasformazioni infinitesime

$$\Omega F = X_k F + Y_k F,$$

ossia che le (6) trarranno le relazioni

$$\Omega_l(\varphi_{jk}) = \Omega_l(\psi_{jk})$$

Queste si scrivono infatti

$$(6^*) \qquad X_l(\varphi_{jk}) = Y_l(\psi_{jk})$$

e il calcolo già eseguito alla fine del § 54 ci dimostra che i primi membri sono funzioni quadratiche delle φ dipendenti unicamente dalle costanti di composizione, onde i secondi membri sono le stesse funzioni delle ψ come i primi delle φ. - Ne segue appunto che le (6*) sono conseguenze delle (6) c.d.d.

§. 88
Simiglianza di un gruppo con sè stesso

Un caso particolare importante della simiglianza di due gruppi si ottiene supponendo che questi due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r) \ , \ X_k f = \sum_i^{1 \dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r) \ , \ Y_k f = \sum_i^{1 \dots n} \eta_{ki}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

coincidano, che cioè le $\eta_{ki}(y)$ siano le medesime funzioni delle y come le $\xi_{ki}(x)$ delle x. In questo caso una trasformazione T che cangi G_r in Γ_r trasforma ogni trasformazione finita di G_r in un'altra tale trasformazione, ossia è permutabile col gruppo G_r. Il problema di trovare tutte le trasformazioni T che pongono un gruppo in relazione di simiglianza con sè medesimo si può dunque enunciare anche in questo modo: Trovare tutte le trasformazioni T, permutabili col gruppo, ossia tutte quelle che lo trasformano in se medesimo.

È manifesto che fra le trasformazioni cercate T figurano sempre tutte le trasformazioni del gruppo stesso; le corrispondenti permutazioni indotte sulle trasformazioni di G_r sono date allora dal gruppo

aggiunto. In generale il complesso di tutte le trasformazioni T permutabili con G_r è manifestamente un gruppo che può del resto essere un gruppo Γ finito o infinito ed in ogni caso contiene G_r stesso come sottogruppo. Se Γ è finito si può anche dire che è il più ampio gruppo in cui G_r è contenuto come sottogruppo invariante.

La ricerca di questo gruppo Γ si può facilmente ridurre ad operazioni algebriche e all'altro problema più semplice di trovare tutte le trasformazioni singolarmente permutabili colle trasformazioni di G_r, cioè quelle che trasformano non solo G_r in se medesimo ma ogni singola trasformazione di G_r in se medesima.

E infatti se una trasformazione T trasforma G_r in se stesso trasformerà le r sue trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots\ldots X_r f$$

in altre r

$$X'_1 f,\ X'_2 f \ldots\ldots X'_r f$$

combinazioni lineari a coefficienti costanti delle prime r; siano le formole corrispondenti le (30) del paragrafo 80

$$(7) \qquad X'_i f = \sum_k a_{ik} X_k f.$$

Le $X'_1, X'_2 \ldots\ldots X'_r$ debbono innanzi tutto offrire la medesima composizione delle primitive, ciò che si

esprime, ponendo nelle (3) del citato § 80 le $c'_{iks} = c_{ik}$.
Così le costanti a_{ki} debbono soddisfare le r^3 equazioni

$$(8) \qquad \sum_{s}^{1\dots r} a_{s\mu} c_{iks} = \sum_{j\lambda}^{1\dots r} a_{ij} a_{k\lambda} c_{j\lambda\mu}$$

$$i, k, \mu = 1, 2 \dots r$$

le quali ammettono, come è naturale, la soluzione $a_{ki} = \varepsilon_{ki}$ – I possibili sistemi di valori delle a si otterranno discutendo questo sistema di equazioni quadratiche, le quali dipendentemente dalla composizione del gruppo potranno formare una serie discreta, ovvero una serie continua restando alcune delle a indeterminate – Preso uno di questi sistemi di valori delle a, se esisterà una trasformazione T che trasformi $X_1 X_2 \dots X_r$ in $X'_1, X'_2 \dots X'_r$ (ciò che si riconoscerà applicando i criterii per la somiglianza), tutte le altre che trasformano ancora $X_1 X_2 \dots X_r$ in $X'_1 . X'_2 \dots X'_r$ si otterranno evidentemente combinando la T con tutte quelle trasformazioni U che trasformano ciascuna X_k in se medesima; e queste U non sono altro che le trasformazioni permutabili con ogni singola di G_r – Esse formano un gruppo H finito od infinito, che può anche ridursi alla sola identità. In ogni caso H è contenuto come sottogruppo in Γ e se H è finito lo è pure Γ, il numero dei parametri di Γ eccedendo

[...]itto di H a l'massimo per il numero dei coefficienti a_{ik} che le (8) lasciano arbitrari –

§ 89

Trasformazioni permutabili con le singole trasformazioni di un gruppo

Come si è visto, il problema di trovare tutte le trasformazioni permutabili con un gruppo G_r si riduce essenzialmente all'altro più semplice di trovare tutte le trasformazioni permutabili con ciascuna trasformazione del gruppo. Vogliamo ora occuparci particolarmente di questo problema, la cui risoluzione dà risultati importanti per la teoria generale dei gruppi.

Il caso che interessa per la teoria dei gruppi continui è quello in cui il gruppo, sopra indicato con H, formato dalle trasformazioni permutabili colle trasformazioni di G_r è un gruppo continuo.

Sia H finito od infinito, dovrà contenere in ogni caso delle trasformazioni infinitesime e dei sottogruppi G_1 ad un parametro da queste generati. La questione fondamentale da trattarsi per lo studio del gruppo H è quindi la seguente:

Trovare tutte le trasformazioni infinitesime

$$Zf = \sum_{i}^{1\ldots n} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

permutabili con tutte le trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$$

di G_r, che soddisfano cioè alle r equazioni (cf. § 19) -

$$(9) \qquad (X_i, Z) = 0$$

È chiaro che se $Z_1 f$, $Z_2 f$ sono due tali trasformazioni, anche qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti costanti $aZ_1 f + bZ_2 f$, come anche, a causa dell'identità Jacobiana, la loro espressione alternata $(Z_1 Z_2)$ è una delle trasformazioni stesse - Le (9) danno per determinare le incognite ζ le equazioni

$$(9^*) \qquad X_i(\zeta_k) = Z(\xi_{ik}) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r \\ k = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

cioè le rn equazioni lineari omogenee nelle ζ e nelle loro derivate prime

$$(10) \qquad \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r \\ k = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

Se delle cercate trasformazioni Zf ne esiste solo un numero finito s di linearmente indipendenti

$$Z_1 f, \; Z_2 f \ldots\ldots Z_s f$$

queste generano un gruppo Γ_s di trasformazioni permutabili con tutte quelle di G_r. È chiaro che Γ_s coinciderà con H, o ne sarà un sottogruppo se

H è un gruppo misto. In questo caso il sistema (10) di equazioni a derivate parziali sarà un sistema di Mayer, od equivalente ad un tale sistema.

Quando invece esistano infinite trasformazioni Zf indipendenti, nell'integrale generale delle (10) entreranno delle funzioni arbitrarie e il gruppo generato dalle Zf sarà un gruppo infinito nel senso preciso di Lie (cf. §. 36)

Nell'ipotesi che esista qualche trasformazione infinitesima Zf è facile decidere se avrà luogo il primo od il secondo dei casi ora descritti. Diciamo che vi sarà un numero finito di Z linearmente indipendenti se il gruppo G_r è transitivo, invece un numero infinito se G_r è intransitivo. Infatti se G_r è transitivo, la caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdots & \xi_{rn} \end{Vmatrix}$$

è precisamente $= n$, onde si vede subito che le (10) danno tutte le derivate parziali $\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}$ delle ζ espresse linearmente per le ζ (oltre ad un certo numero di equazioni finite lineari nelle ζ). Si può dunque formare un sistema di equazioni ai differenziali totali per le ζ e non esisterà quindi che

uno numero finito s di sistemi di valori linearmente distinti per le ξ; cioè s sole trasformazioni

$$Z_1 f,\ Z_2 f \dots\dots Z_s f$$

linearmente indipendenti.

Invece se G_r è intransitivo, esso possiede certamente degli invarianti Φ; uno qualunque di essi è una funzione arbitraria di un certo numero d'invarianti fondamentali e soddisfa le equazioni

$$X_i \Phi = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} = 0$$

Ne risulta che se alle (10) si soddisfa con

$$\xi_1,\ \xi_2 \dots\dots \xi_n$$

si soddisfa anche con

$$\Phi\xi_1,\ \Phi\xi_2 \dots\dots \Phi\xi_n$$

ciò che dimostra quanto si è asserito.

Concludiamo: Se esiste qualche trasformazione infinitesima permutabile con tutte le trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$ di un gruppo G_r, la più generale trasformazione infinitesima permutabile colle $X_k f$ contiene soltanto parametri ovvero funzioni arbitrarie secondo che il gruppo è transitivo od intransitivo.

Quando avremo dimostrato in generale (ciò che faremo nel Cap. VIII) che le condizioni B), trovate al § 86 come necessarie per la simi-

gliango di due gruppi, sono altresì sufficienti, ne discenderà subito che: Esistono o non esistono trasformazioni infinitesime permutabili con tutte quelle di un gruppo G_r, secondo che il gruppo è sistatico od asistatico.

L'ultima cosa risulta del resto immediatamente da quanto si è dimostrato al § 87 e può anche provarsi così. Ponendo nella identità (5) $f = \xi_k$ e ricordando che deve essere

$$X_i(\xi_k) = \overset{y}{x}(\xi_{ik}) \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

abbiamo

$$\overset{y}{x}(\xi_{q+j,k}) = \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x) X_\lambda(\xi_k)$$

o

$$\overset{y}{x}(\xi_{q+j,k}) = \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda} \overset{y}{x}(\xi_{\lambda k})$$

e poichè dalla (5)

$$\xi_{q+j,k} = \sum_{\lambda} \varphi_{j\lambda} \xi_{\lambda k},$$

la precedente diventa

$$\sum_{\lambda}^{1\ldots q} \xi_{\lambda k} \overset{y}{x}(\varphi_{j\lambda}) = 0 \qquad \begin{cases} k = 1, 2 \ldots n \\ j = 1, 2 \ldots r-q \end{cases}$$

La matrice delle ξ avendo appunto la caratteristica q, le precedenti equivalgono alle

$$\overset{y}{x}(\varphi_{j\lambda}) = 0$$

$$j = 1, 2 \ldots r-q \quad , \quad \lambda = 1, 2 \ldots q$$

cioè alle equazioni lineari nelle ξ

$$(11) \qquad \sum_{\nu}^{1\dots n} \frac{\partial \varphi_{i\lambda}}{\partial x_\nu} \xi_\nu = 0$$

Se il gruppo è asistatico vi sono n funzioni φ indipendenti e le precedenti dimostrano che si ha necessariamente

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots\dots = \xi_n = 0$$

§. 90
Gruppi semplicemente transitivi reciproci

Il caso particolare più importante dei risultati precedenti si ottiene supponendo che il gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots\dots X_r)$ sia semplicemente transitivo, cioè che sia $n = r$ e la matrice delle ξ_{ki} abbia per caratteristica n.

In questo caso le trasformazioni

$$(12) \qquad x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots\dots x_n)$$

del gruppo H, permutabili colle singole trasformazioni di G_n, devono cangiare le

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad k = 1, 2 \dots\dots n$$

singolarmente in

$$X'_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad k = 1, 2, \dots n$$

Secondo il teorema alla fine del § 85, tutte le cercate trasformazioni (12) si ottengono eguagliando

ad altrettante costanti arbitrarie le n soluzioni indipendenti del sistema completo

$$X_k f + X'_k f = 0$$

Se diciamo

$$\Omega_1(x, x'),\ \Omega_2(x, x'), \dots \Omega_n(x, x')$$

queste soluzioni, le n equazioni

$$(13)\quad \begin{cases} \Omega_1(x_1\, x_2 \dots x_n ;\, x'_1\, x'_2 \dots x'_n) = a_1 \\ \Omega_2(x_1\, x_2 \dots x_n ;\, x'_1\, x'_2 \dots x'_n) = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_n(x_1\, x_2 \dots x_n ;\, x'_1\, x'_2 \dots x'_n) = a_n , \end{cases}$$

che sono risolubili tanto rispetto alle x' che alle x, definiscono un gruppo Γ_n di trasformazioni cogli n parametri (evidentemente essenziali) $a_1\, a_2 \dots a_n$ ed a coppie di trasformazioni inverse. Esso è generato da n trasformazioni infinitesime

$$Z_1 f,\ Z_2 f \dots Z_n f$$

che possono già determinarsi dalle trasformazioni infinitesime di G_2 integrando il sistema (10), che nel caso attuale è un sistema puro di equazioni di differenziali totali per le ξ, illimitatamente integrabile.

Questo gruppo $\Gamma_n \equiv (Z_1\, Z_2 \dots Z_n)$ le cui equazioni finite sono date dalle (13) è semplicemente transitivo come G_n, poichè il numero n delle variabili eguaglia quello dei parametri a, rispetto ai quali le (13) sono già risolute. Questo gruppo Γ_n dicesi

il gruppo reciproco di G_n ed è chiaro che inversamente il gruppo reciproco di Γ_n è G_n. I due gruppi semplicemente transitivi reciproci G_n, Γ_n stanno fra loro nella relazione caratteristica che tutte le trasformazioni dell'uno sono permutabili con tutte quelle dell'altro.

Riepiloghiamo questi risultati nel teorema:

Se $X_1 f, X_2 f, \ldots X_n f$ sono le n trasformazioni infinitesime generatrici di un gruppo G_n semplicemente transitivo nelle n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$, le n equazioni (9*) o (10)

$$(X_i, Z) = 0$$

definiscono la trasformazione infinitesima più generale di un altro gruppo $\Gamma_n = (Z_1 Z_2 \ldots Z_n)$ semplicemente transitivo, che dicesi reciproco di G_n. La relazione fra i due gruppi G_n, Γ_n è involutoria, ciascuno di essi constando di tutti quei gruppi ad un parametro le cui trasformazioni sono permutabili con ogni trasformazione dell'altro gruppo.

§ 91
Proprietà delle coppie di gruppi (G_n, Γ_n) reciproci

Prima di far conoscere alcune notevoli proprietà delle coppie (G_n, Γ_n) di gruppi semplicemente transitivi reciproci dimostriamo in altro modo i risultati precedenti, per il che basta provare direttamente l'illimitata integrabilità del sistema (10) di equazioni ai differenziali totali per le ξ, che essendo il determinante $|\xi_{ik}| \neq 0$ esprimono appunto tutte le derivate delle ξ linearmente ed omogeneamente per le ξ — Per le note relazioni fra le equazioni ai differenziali totali e i sistemi di equazioni lineari omogenee a derivate parziali, se indichiamo con

$$F(x_1\, x_2 \dots x_n\, ;\, \xi_1\, \xi_2 \dots \xi_n)$$

una funzione delle $2n$ variabili x, ξ pensate come indipendenti, l'integrazione del sistema (9*) o (10) equivale all'integrazione del seguente sistema di n equazioni a derivate parziali per la F

$$(11) \qquad B_i F = X_i F + \sum_k^{1 \dots n} \left(\sum_\nu^{1 \dots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} \xi_\nu \right) \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = 0$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

Ora, se si tien conto dell'identità

$$(X_i, X_j) = \sum_s^{1 \dots n} c_{ijs} X_s$$

$$X_i(\xi_{jk}) - X_j(\xi_{ik}) = \sum_s c_{ijs}\, \xi_{sk}$$

dalla quale derivando rapporto a x_ν risulta

$$X_i\left(\frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_\nu}\right) - X_j\left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu}\right) + \sum_\lambda \left(\frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \xi_{j\lambda}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\lambda}\right) =$$

$$= \sum_s c_{ijs} \frac{\partial \xi_{sk}}{\partial x_\nu},$$

si trova subito che le operazioni $B_i F$ dei primi membri delle (11) soddisfano, come le $X_i f$, alle relazioni

$$(12) \qquad (B_i, B_j) = \sum_s c_{ijs} B_s f$$

Il sistema (11) è dunque completo, quindi il sistema (10) illimitatamente integrabile.

Osserviamo di passaggio che il verificarsi delle (12) prova che le n trasformazioni infinitesime $B_i f$ nelle $2n$ variabili x, ξ generano un gruppo $\mathcal{G}_n$ nello spazio S_{2n} di queste variabili; in esso la varietà

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \ldots\ldots \xi_n = 0$$

è invariante e sui punti di questa varietà il gruppo $\mathcal{G}_n$ agisce secondo il gruppo G_n. Il gruppo intransitivo $\mathcal{G}_n$ possiede n invarianti, che possono assumersi lineari ed omogenei nelle ξ, ed eguagliandoli ad altrettante costanti se ne traggono i valori cercati delle ξ.

Veniamo ora alle accennate proprietà dei gruppi G_n, Γ_n reciproci, cominciando dal dimostrare il

notevole teorema:

Due gruppi semplicemente transitivi reciproci sono sempre simili.

In ordine ai risultati del § 85, basterà perciò provare che si possono scegliere le loro trasformazioni infinitesimali in guisa che i due gruppi offrano uguale composizione. In un punto generico dello spazio, essendo nelle notazioni del § 38 $r_0 = n$ le trasformazioni generatrici di G_n sono tutte di ordine zero; sia $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ un tale punto e per semplificare la scrittura poniamo senz'altro che questo punto sia l'origine. Sviluppando le relative trasformazioni infinitesime in serie per le potenze delle x, avremo, ponendo in evidenza i termini di grado zero ed uno,

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{k,l}^{1\ldots n} b_{ikl} x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

e il determinante delle a_{ik} sarà per ipotesi diverso da zero.

Cangiando le $X_i f$ in n loro convenienti combinazioni lineari si potrà porre

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k,l} b_{ikl} x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

Poichè nell'origine il determinante delle $\xi_{i\ell} \neq 0$, le equazioni ai differenziali totali (10) per le ξ permettono di assegnare ad arbitrio per le ξ i valori in-

ziali. Prendiamo allora per la $Z_i f$

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = \xi_2 = \ldots\ldots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \ldots\ldots = \xi_n = 0 \\ \xi_i = -1 \end{array}\right\} \text{per } x_k = 0$$

ed avremo

$$Z_i f = -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k,l} \beta_{ikl}\, x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

Ma si deve avere identicamente

$$(X_i\, Z_j) = 0 \qquad i, j = 1, 2 \ldots n$$

e scrivendo solo i termini costanti è

$$(X_i\, Z_j) = \sum_l (\beta_{jil} + b_{ijl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots ;$$

dunque

$$(13) \qquad \beta_{jil} = -b_{ijl}$$

D'altra parte si ha anche

$$(14) \qquad (X_i\, X_k) = \sum_l (b_{kil} - b_{ikl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

$$(Z_i\, Z_k) = \sum_l (\beta_{ikl} - \beta_{kil}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots,$$

la quale ultima per la (13) può scriversi

$$(15) \qquad (Z_i\, Z_k) = \sum_l (b_{kil} - b_{ikl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

Supponendo ora

$$(X_i\, X_k) = \sum_l c'_{ikl} X_l f = \sum_l c_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

$$(Z_i\, Z_k) = \sum_l c'_{ikl} Z_l f = -\sum_l c'_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \ldots$$

e paragonando colle (14), (15) si ottiene subito

$$c'_{ikl} = c_{ikl}$$

Dunque i due gruppi G_n, Γ_n sono egualmente

composti c.d.d. —

Osserviamo ora che una trasformazione comune a G_n, Γ_n è permutabile con ciascuna trasformazione sì di G_n che di Γ_n, e viceversa una trasformazione di G_n permutabile con ogni altra di Γ_n trovasi in Γ_n. Dunque:

Le trasformazioni comuni a due gruppi semplicemente transitivi reciproci formano il sottogruppo commutativo dell'uno e dell'altro gruppo.

Evidentemente poi eseguendo una qualsiasi trasformazione sulle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ su cui operano G_n, Γ_n questi si cangiano nuovamente in una coppia di gruppi reciproci — In particolare si ha il teorema:

Tutte le trasformazioni che cangiano in sè medesimo il gruppo semplicemente transitivo G_n (che sono permutabili con G_n) cangiano pure in se stesso il gruppo reciproco Γ_n.

Segue di qui che il più ampio gruppo sulle variabili x che contiene G_n come sottogruppo invariante è anche il più ampio che contenga Γ_n. — In ogni caso questo gruppo conterrà come sottogruppo il prodotto (§ 64) dei due G_n, Γ_n; quest'ultimo ha $2n-\mu$ parametri se μ è il numero dei parametri del sottogruppo commutativo di G_n (o di Γ_n).

§ 92
Costruzione diretta del gruppo reciproco Γ_n

Al gruppo reciproco Γ_n di un gruppo G_n semplicemente transitivo si può arrivare con considerazioni dirette, intuitive e molto semplici nel modo seguente.

Dato un gruppo G_n semplicemente transitivo nell'$S_n \equiv (x_1 x_2 \ldots x_n)$ proponiamoci di studiare la totalità di quelle trasformazioni γ che sono permutabili con qualsiasi trasformazione di G_n. Fissiamo nello spazio un punto O qualunque ma in posizione generale rispetto al gruppo, cioè in modo che la dimensione della minima varietà invariante relativa ad O abbia il valore generico n, ossia in modo che O sia portato da G_n in tutti i punti di un intorno ad n dimensioni di O. (*)

Indichiamo con O' il punto in cui O è trasportato da γ, ciò che esprimiamo simbolicamente scrivendo

$$(\alpha) \qquad O(\gamma) \equiv O'$$

Essendo P un punto qualunque nell'intorno di O, sia P' il punto in cui γ lo trasporta, ossia

$$(\beta) \qquad P(\gamma) \equiv P'$$

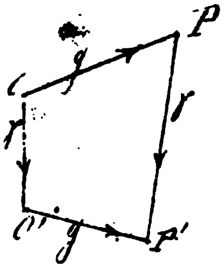
(*) Basta perciò che in O non si annulli il determinante delle $|\xi_{ik}|$ (§ 26) -

Nel gruppo G_n semplicemente transitivo vi è una trasformazione g che trasporta O nel punto P nel suo intorno, cioè

$$O(g) \equiv P$$

e quindi per la (β)

$$O(g\gamma) \equiv P(\gamma) \equiv P'$$



Ma essendo per ipotesi γ permutabile con g, si può scrivere

$$O(\gamma g) \equiv P'$$

ossia per la (α)

$$O'(g) \equiv P'$$

Dunque la trasformazione γ è perfettamente determinata quando sappiamo in quale punto O' trasporta O, giacchè allora trasporterà un punto qualsiasi P (nell'intorno di O) in quel punto P' che nasce da O' per quella determinata trasformazione g di G_n che trasporta O in P.

Viceversa prendiamo una coppia O, O' arbitraria (generica) di punti in S_n e stabiliamo una corrispondenza fra i punti dell'intorno di O e quelli dell'intorno di O' con questa legge che ad un punto P in cui è trasportato O da una g qualunque di G_n:

$$P \equiv O(g)$$

facciamo corrispondere il punto

$$P' \equiv O'(g),$$

così P occuperà tutte le posizioni dell'intorno di O e P'

tutto quello dell'intorno di O'.

Quella trasformazione γ che porta ogni punto P nel corrispondente P' sarà permutabile con ogni g in G_n - Per dimostrarlo basta osservare che se (P, P') (Q, Q') sono due coppie qualunque di punti corrispondenti, che nascono da (O, O') colle rispettive trasformazioni g, g_1 di G_n, si passa ancora dalla coppia (P, P') alla (Q, Q') colla trasformazione $g^{-1}g_1$ di G_n, sicché partendo p. e. da (P, P') in luogo che da (O, O') si stabilisce ancora la medesima corrispondenza - È evidente allora che le due trasformazioni

$$g\gamma \;,\; \gamma g$$

hanno su qualunque punto M dello spazio (nell'intorno di O) lo stesso effetto e quindi $g\gamma = \gamma g$.

Dopo ciò vediamo anche subito che la totalità di queste trasformazioni γ è un gruppo Γ_n semplicemente transitivo - Intanto le γ formano un gruppo poiché il prodotto di due trasformazioni permutabili con tutte le g gode della stessa proprietà. Nella espressione delle γ entrano poi manifestamente n parametri, le coordinate di O' che si fa corrispondere al punto fisso O. Gli n parametri sono poi essenziali perché con una γ conveniente si può trasportare O dovunque. Dunque le γ formano un Γ_n semplicemente transitivo c. d. d.

Siamo pervenuti così nuovamente, con metodo diretto, alla nozione del gruppo Γ_n reciproco di G_n -

Di più da queste considerazioni si trae il modo di trovare le equazioni in termini finiti di Γ_n note quelle di G_n -

Siano

(α) $x_i' = f_i(x, a)$

le equazioni finite di G_n e indichiamo con $x_i^{(0)}$ le coordinate fisse di O, con $b_1\, b_2 \ldots b_n$ quelle variabili di O' e siano

$$P = (y_1\, y_2 \cdots y_n) \quad , \quad P' = (y_1'\, y_2' \cdots y_n')$$

La trasformazione g di G_n che porta O in P ed O' in P' sia la (d); avremo:

$$\begin{cases} y_i = f_i(x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)} ; a_1\, a_2 \ldots a_n) \\ y_i' = f_i(b_1 \ldots b_n ; a_1\, a_2 \ldots a_n) \end{cases}$$

Eliminando le a fra queste si otterranno le relazioni cercate

$$y_i' = \varphi_i(y_1\, y_2 \cdots y_n ; b_1\, b_2 \cdots b_n)$$

cioè le equazioni finite di Γ_n -

§ 93

Imprimitività di un gruppo semplicemente transitivo

Le considerazioni precedenti conducono a dimostrare il teorema già accennato al § 54: Ogni gruppo G_n semplicemente transitivo è imprimitivo -

Naturalmente si suppone qui $n>1$. Nel gruppo reciproco Γ_n è contenuto certamente qualche sottogruppo Γ_m con $m<n$ parametri. Le minime varietà invarianti (generiche) rispetto a Γ_m sono di dimensione m (*); perciò il gruppo intransitivo Γ_m divide lo spazio in ∞^{n-m} varietà V_m, per ogni punto dello spazio passando una di queste varietà. È facile vedere che rispetto al gruppo G_n questa è una divisione in sistemi d'imprimitività, cioè che ogni trasformazione di G_n o lascia fissa ciascuna varietà V_m o scambia queste varietà fra loro. Siano infatti O, O' due punti qualunque di una stessa V_m e g una trasformazione qualsiasi in G_n, e siano P, P' i due punti in cui g trasporta O, O'. Quella trasformazione γ di Γ_n che trasporta O in O' appartiene a Γ_m e trasporta anche P in P' (§ precedente); dunque P' è su quella varietà V_m che passa per P c.d.d. Abbiamo dunque intanto: Ad ogni sottogruppo Γ_m del gruppo reciproco Γ_n di un gruppo G_n semplicemente transitivo corrisponde una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività rispetto a G_n, costituita dalle minime varietà invarianti rispetto a Γ_n.

(*) Si ricordi che in un punto generico dello spazio le trasformazioni infinitesime di Γ_n, e perciò quelle di Γ_m, sono tutte d'ordine zero.

Questo risultato si prova del resto anche subito applicando i criterii del § 52 per riconoscere se un sistema completo ammette un dato gruppo. E infatti se $Z_1 f$, $Z_2 f, \ldots Z_m f$ sono le trasformazioni infinitesime di Γ_m il sistema

$$Z_1 f = 0\,,\ Z_2 f = 0 \ldots\ldots Z_m f = 0$$

che integrato dà gli invarianti di Γ_m ammette il gruppo $G_n = (X_1 X_2 \ldots X_n)$ perchè

$$(X_i\, Z_k) = 0 \qquad \begin{cases} i = \\ k = \end{cases} 1, 2 \ldots n$$

È facile di più vedere che così si ottengono tutte le possibili divisioni dello spazio in sistemi d'imprimitività rispetto al gruppo G_n – Supponiamo infatti di avere una tale divisione in ∞^{n-m} varietà V_m. Se del gruppo reciproco Γ_n consideriamo solo quelle trasformazioni γ che cangiano il punto O (generico) in tutti i punti O' della varietà V_m per O esse costituiranno una serie ∞^m. Se g è una trasformazione qualunque di G_n che porti O, O' in P, P' questi due apparterranno ad una stessa V_m e la γ che trasporta P in P' fa dunque scorrere anche questa V_m in se stessa. Ne segue che il prodotto di due γ è ancora una γ, cioè che le γ formano appunto un sottogruppo Γ_m di Γ_n.

Così adunque per un gruppo semplicemente transitivo sappiamo risolvere completamente il proble-

ma (§§ 51, 52) di trovare tutti i sistemi completi che ammettono il gruppo.

Capitolo VIII°

Isomorfismo dei gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime. Gruppi parametrici. Isomorfismo dei gruppi in relazione colle trasformazioni finite. Risoluzione generale del problema di riconoscere la simiglianza di due gruppi.

§ 94

Isomorfismo fra due gruppi fondato sulla corrispondenza delle loro trasformazioni infinitesime

Come nella teoria dei gruppi di sostituzioni (dei gruppi finiti di operazioni) e più in generale nella teoria dei gruppi discontinui, così anche in quella dei gruppi continui di trasformazioni si può stabilire l'importante concetto d'isomorfismo fra i gruppi. Ma nella teoria dei gruppi continui si può arrivare in due modi diversi allo scopo e cioè o stabi-

lire, come nella ordinaria teoria, una certa corrispondenza fra le trasformazioni finite di due gruppi, ovvero stabilire una corrispondenza analoga fra le trasformazioni infinitesime dei due gruppi.

Seguiremo da principio la secondaria, che è la più semplice e piana, e più tardi, dopo lo studio dei gruppi parametrici, dimostreremo che la corrispondenza stabilita fra le trasformazioni infinitesime determina, precisata, una corrispondenza fra le trasformazioni finite, che soddisfa appunto alle ordinarie leggi d'isomorfismo (§§ 102, 103).

Cominciamo dal considerare due gruppi

$$G_r = (X_1 X_2 \ldots\ldots X_r)$$

$$\Gamma_r = (X_1' X_2' \ldots X_r')$$

con egual numero r di parametri che siano egualmente composti, cioè tali che con

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

si abbia ancora

$$(X_i' X_k') = \sum_s c_{iks} X_s' f,$$

le costanti c_{iks} di composizione essendo le stesse.

Se facciamo corrispondere ad ogni trasformazione infinitesima

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f$$

in G_r precisamente la

$$\lambda_1 X_1' f + \lambda_2 X_2' f + \cdots + \lambda_r X_r' f$$

in G_r', avremo manifestamente stabilita una corrispondenza biunivoca fra le trasformazioni infinitesime di G_r e quelle di G_r' in guisa che se

$$Af, \; Bf$$

sono due trasformazioni infinitesime qualunque di G_r ed

$$A'f, \; B'f$$

quelle corrispondenti di G_r', alla trasformazione alternata (AB) in G_r corrisponde l'alternata $(A'B')$ in G_r' - Per esprimere questo fatto si dice che i due gruppi G_r, G_r'' sono isomorfi e precisamente, la corrispondenza delle loro trasformazioni infinitesime essendo biunivoca (ovvero essendo lo stesso il numero dei parametri) i due gruppi diconsi isomorfi oloedricamente - Il concetto d'isomorfismo oloedrico fra due gruppi coincide manifestamente con quello di egual composizione, sicchè due gruppi egualmente composti sono anche sempre isomorfi oloedricamente e viceversa -

È chiaro senz'altro che due gruppi oloedricamente isomorfi ad un terzo lo sono anche fra loro, cioè l'isomorfismo oloedrico soddisfa alla legge fondamentale dell'eguaglianza -

Ma si possono anche paragonare le composizioni di due gruppi con diverso numero di parametri

ed introdurre il concetto d' isomorfismo meriedrico nel modo seguente.

Sia

$$G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$$

un gruppo a r parametri e

$$G'_{r-q} = (X'_1 X'_2 \dots X'_{r-q})$$

un gruppo a $r-q$ parametri e siano c_{iks} le costanti di composizione di G_r, cioè

$$(a) \qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

Se è possibile scegliere fra le trasformazioni infinitesime

$$\lambda_1 X'_1 f + \lambda_2 X'_2 f + \dots + \lambda_{r-q} X'_{r-q} f$$

di G'_{r-q} r trasformazioni

$$Y_1 f, \; Y_2 f, \dots Y_r f$$

fra le quali ve ne siano $r-q$ indipendenti, in guisa che insieme alle (a) sussistano le identità

$$(b) \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f,$$

si dirà che: Il gruppo minore G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q col maggiore G_r.

Il Lie preferisce di adoperare questa determinata locuzione e non parlare senz'altro d'isomorfismo meriedrico fra i due gruppi perchè questa specie di isomorfismo non soddisfa più, come quello oloedrico, alla legge fondamentale dell'eguaglianza, cioè due

gruppi meriedricamente isomorfi ad un terzo non lo sono più in generale fra loro.

Si osservi che anche nel caso attuale ad una trasformazione infinitesima

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f$$

di G_r ne corrisponderà una pienamente determinata in G'_{r-q} e cioè

$$\lambda_1 Y_1 f + \lambda_2 Y_2 f + \cdots + \lambda_r Y_r f$$

ed ancora se ad Af, Bf in G_r corrispondono $A'f$, $B'f$ in G'_{r-q}, alla (A,B) corrisponderà (A',B').

Abbiamo già incontrato diversi esempi d'isomorfismo sì oloedrico che meriedrico. Così il gruppo aggiunto Γ di un gruppo G_r è sempre isomorfo oloedricamente o meriedricamente con G_r, e precisamente ha luogo il primo caso se G_r non possiede sottogruppo commutativo, l'altro nel caso contrario (cf. §70). Così anche se consideriamo una varietà V invariante rispetto ad un gruppo G_r, il gruppo stesso considerato come agente sui punti di V dà luogo ad un gruppo isomorfo con G_r e precisamente l'isomorfismo è oloedrico o meriedrico secondo che non esiste od esiste in G_r un sottogruppo che lasci fissi i singoli punti di V (cf. la fine del §44, ove appare evidente che le trasformazioni infinitesime ivi indicate con Uf sono composte come le Xf).

Notiamo poi che il problema di riconoscere se, dati due gruppi in generale di un numero diverso di parametri

$$G_r = (X_1 X_2 \ldots X_r)$$

$$G'_{r-q} \equiv (X'_1 X'_2 \ldots X'_{r-q}),$$

è possibile di porre G'_{r-q} in corrispondenza d'isomorfismo con G_r (oloedrico per $q=0$ meriedrico per $q>0$), si riduce subito ad una questione algebrica. Posto infatti

$$Y_i f = \sum_k^{1\ldots r-q} a_{ik} X'_k f \qquad (i=1, 2 \ldots r)$$

è questione di determinare le $r(r-q)$ costanti a_{ik} in guisa 1° che la loro matrice sia di caratteristica $r-q$, 2° che con $(X_i X_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{ijs} X_s f$ sia anche

$$(Y_i Y_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{ijs} Y_s f$$

Indicando con c' le costanti di composizione delle X' si hanno per ciò le $r^2(r-q)$ equazioni quadratiche nelle a (cf. § 80)

$$\sum_{k,l}^{1\ldots r-q} c'_{klt}\, a_{ik}\, a_{jl} = \sum_s^{1\ldots r} c_{ijs}\, a_{st}$$

$$i, j = 1, 2 \ldots r$$

$$t = 1, 2 \ldots r-q$$

§ 95
Proprietà dell'isomorfismo

Si abbiano due gruppi G_r, G'_{r-q}, in generale di diverso numero di parametri, ed il secondo sia posto in relazione d'isomorfismo meriedrico d'ordine q col primo, ai le trasformazioni generatrici

$$X_1 f \,.\, X_2 f \ldots X_r f$$

del primo corrispondendo rispettivamente

$$Y_1 f,\ Y_2 f \ldots Y_r f$$

nel secondo. Fra queste ve ne sono $r-q$ indipendenti, e possiamo supporre che siano le prime $r-q$

$$Y_1 f,\ Y_2 f \ldots Y_{r-q} f\,;$$

allora le seguenti si esprimeranno linearmente ed omogeneamente per queste con coefficienti costanti, sia

$$(1) \qquad Y_{r-q+i} f = \sum_s^{1\ldots r-q} d_{is} Y_s f$$

Alle q trasformazioni infinitesime indipendenti in G_r

$$(2) \qquad X_{r-q+i} f - \sum_s^{1\ldots r-q} d_{is} X_s f$$

e ad ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti corrisponde in G'_{r-q} la trasformazione infinitesima identicamente nulla. Viceversa ogni trasformazione infinitesima

$$(3) \qquad \mathfrak{X} f = \sum_i^{1\ldots r} \lambda_i X_i f$$

di G_r cui corrisponda l'identità in G'_{r-q} è una combina-

zione lineare delle (2), poichè in tale ipotesi deve essere

$$\sum_i^{1\ldots r} \lambda_i Y_i f = \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_i Y_i f + \sum_j^{1\ldots q} \lambda_{r-q+j} Y_{r-q+j} =$$

$$= \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_i Y_i f + \sum_j^{1\ldots q} \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_{r-q+j}\, d_{ji}\, Y_i f = 0$$

e quindi (essendo $Y_1 f \ldots Y_{r-q} f$ indipendenti)

$$\lambda_i = \sum_j^{1\ldots q} \lambda_{r-q+j}\, d_{ji} \qquad (i = 1, 2 \ldots r-q)$$

Perciò la (3) diventa

$$\mathfrak{X} f = \sum_j^{1\ldots r-q} \lambda_{r-q+j} \left(X_{r-q+j} f - \sum_i^{1\ldots r-q} d_{ji} X_i f \right).$$

che è appunto una combinazione lineare delle (2).

Se si considera poi la trasformazione alternata

$$(4) \qquad \left(X_\lambda f, X_{r-q+i} f - \sum_s^{1\ldots r-q} d_{is} X_s f \right)$$

di G_r per

$$\lambda = 1, 2, \ldots r \ ; \ i = 1, 2 \ldots q\,,$$

a questa corrisponde in G'_{r-q} la

$$(Y_\lambda f, 0) = 0$$

e perciò la (4) stessa è una combinazione lineare delle (2). Ne segue il teorema:

Se il gruppo G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, esistono in quest'ultimo q trasformazioni indipendenti (2) cui corrisponde la trasformazione identica in G'_{r-q}: esse generano un sottogruppo Γ_q a q parametri invariante in G_r.

Supponiamo ora di avere in G_r un sottogruppo G_m generato dalle $\underline{m}$ trasformazioni indipendenti

$$(5) \qquad g_{i1} X_1 f + g_{i2} X_2 f + \cdots + g_{ir} X_r f$$

$$i = 1, 2 \ldots r$$

A queste m trasformazioni generatrici di G_m corrispondono in G'_{r-q} le $\underline{m}$

$$(5^*) \qquad g_{i1} Y_1 f + g_{i2} Y_2 f + \cdots + g_{ir} Y_r f;$$

siccome le espressioni alternate formate colle (5) si compongono colle (5) stesse, lo stesso accade per le (5*). Per ciò anche le (5*) generano un sottogruppo in G'_{r-q} e il numero dei parametri di questo sottogruppo $\leq m$ eguaglia il numero delle (5*) indipendenti. Si vede subito anche che se il sottogruppo di G_r generato dalle (5) è invariante in G_r, anche quello di G'_{r-q} generato dalle (5*) sarà invariante in G'_{r-q} - Dunque: Ad ogni sottogruppo di G_r ne corrisponde uno perfettamente determinato in G'_{r-q} e se il primo è invariante in G_r, il secondo lo è in G'_{r-q}.

Inversamente suppongasi di avere in G'_{r-q} un sottogruppo G'_m generato dalle $\underline{m}$ trasformazioni infinitesime

$$\sum_k^{1 \ldots r-q} g_{ik} Y_k f \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

allora le $m+q$ trasformazioni indipendenti

$$\sum_k^{1 \ldots r-q} g_{ik} X_k f, \quad X f_{r-q+j} - \sum_s^{1 \ldots r-q} d_{js} X_s f$$

generano in G_r un sottogruppo G_{m+q} - Di più la

il primo, è invariante in G'_{r-q} il secondo lo sarà in G_r: dunque:

A ogni sottogruppo G'_m di G'_{r-q} ne corrisponde almeno uno in G_r, in particolare ne corrisponde sempre uno G_{m+q} ad $m+q$ parametri, e se G'_m è invariante in G'_{r-q}, lo sarà pure G_{m+q} in G_r -

Risulta da queste considerazioni che si conosceranno tutti i sottogruppi di G'_{r-q} se si conoscono tutti quelli di G_r.

Nel caso dell'isomorfismo oloedrico $q=0$, i risultati superiori si semplificano in modo evidente che risulta del resto dall'avere i due gruppi la medesima composizione -

§ 96

Gruppo complementare di un gruppo G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q

Si è visto che il gruppo G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, alla identità in G'_{r-q} corrisponde in G_r un sottogruppo invariante G_q a q parametri. Importa ora dimostrare inversamente il teorema:

Se un gruppo G_r possiede un sottogruppo invariante G_q, si può sempre costruire un gruppo G'_{r-q} in isomorfi-

smo meriedrico d'ordine q con G_r, tale che all'identità in G'_{r-q} corrisponda in G_r precisamente il sotto gruppo invariante assegnato G_q -

Prendiamo le r trasformazioni infinitesime generatrici di G_r:

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_{r-q} f ; X_{r-q+1} f, \ldots\ldots X_r f$$

in guisa che le ultime q generino il sottogruppo invariante supposto

$$G_q \equiv (X_{r-q+1}, X_{r-q+2} \ldots X_r)$$

Tutte le trasformazioni alternate

$$(X_i X_k)$$

in cui le $k < r-q$ si compongono linearmente con

$$X_{r-q+1} \ldots\ldots X_r,$$

cioè fra le costanti di composizione

$$c_{ik1}, c_{ik2} \ldots\ldots c_{ik,r-q}$$

saranno certo nulle tutte quelle in cui uno degli indici i o k supera $r-q$. Se prendiamo ora le relazioni quadratiche (I) § 24 fra le c

$$\sum_{\nu}^{1\ldots r} (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0,$$

e fra esse consideriamo tutte quelle in cui i quattro indici

$$i, k, j, s$$

prendono solo i valori da 1 a $r-q$, saranno nulle le

$$c_{\nu js} \quad c_{\nu is} \quad c_{\nu ks}$$

quando $\nu > r-q$ - Le relazioni considerate si riducono

quindi alle seguenti

$$\sum_{\nu}^{1\ldots r-q} \left(c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} \right) = 0$$

$$\text{per } i, k, j, s = 1, 2, \ldots r-q.$$

Siccome poi si ha anche

$$c_{iks} + c_{kis} = 0 \qquad (i, k, s = 1, 2, \ldots r-q),$$

si vede che le $(r-q)^3$ costanti

$$c_{iks} \qquad (i, k, s = 1, 2, \ldots r-q)$$

soddisfano le condizioni che, pel terzo teorema fondamentale, assicurano l'esistenza di un gruppo a $r-q$ parametri

$$G'_{r-q} \equiv (Y_1 Y_2 \ldots Y_{r-q})$$

di composizione

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s}^{1\ldots r-q} c_{iks} Y_s f \qquad (i, k = 1, 2 \ldots r-q)$$

Se ora alle $r-q$ $Y f$ aggiungiamo le q

$$Y_{r-q+1} f, \; Y_{r-q+2} f, \ldots Y_r f$$

tutte nulle e facciamo corrispondere ordinatamente alle

$$X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$$

le

$$Y_1 f, Y_2 f, \ldots Y_r f$$

avremo posto il gruppo G'_{r-q} in relazione d'isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r in guisa appunto che all'identità in G'_{r-q} corrisponda in G_r il sottogruppo invariante dato.

$$G_q \equiv (X_{r-q+1} \;\ldots\ldots X_r)$$

come si voleva. –

Aggiungiamo ora le osservazioni seguenti. Il gruppo G'_{r-q} è determinato soltanto dalle sue costanti di composizione, sicchè si può sostituire con qualunque altro gruppo oloedricamente isomorfo. Due gruppi oloedricamente isomorfi si riguardano, in queste teorie generali, come identici e per ciò si parla di un determinato gruppo G'_{r-q}. Per costruirlo effettivamente si potrà adoperare il processo del § 29 che serve nella dimostrazione di Schur del terzo teorema fondamentale e porlo sotto la forma di un gruppo semplicemente transitivo sopra $r-q$ variabili; per la sua costruzione effettiva bastano, come si è visto al § 29, operazioni algebriche. – Il gruppo G'_{r-q} è determinato dal gruppo G_r e dal suo sottogruppo invariante G_q; come nella teoria dei gruppi di sostituzioni si dirà: il gruppo complementare del gruppo G_r rispetto al sottogruppo invariante G_q e si indicherà col simbolo di quoziente

$$G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$$

Come già si è detto, questo gruppo complementare $G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$ è unicamente determinato dalle sue costanti di composizione, le quali si calcolano, per quanto precede, nel modo seguente: Supposto

$$G'_q \equiv (X_{r-q+1}, X_{r-q+2} \dots X_r)$$

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_{r-q} ; X_{r-q+1} \dots X_r)$$

si formano tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k) \qquad i, k = 1, 2 \dots r-q$$

formate con quelle trasformazioni infinitesime di G_r che non sono in G_q e, calcolate le loro espressioni lineari per

$$X_1 f \dots X_r f,$$

cioè

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} X_s f,$$

si tien conto solo di quei termini del secondo membro che contengono le dette $X_1 X_2 \dots X_{r-q}$; i coefficienti

$$c_{iks} \qquad i, k, s = 1, 2 \dots r-q$$

sono le costanti di composizione del gruppo complementare G'_{r-q} -

Osserviamo infine come da queste considerazioni risulta risoluto il problema:

Noti tutti i sottogruppi invarianti di un gruppo G_r trovare tutte le possibili composizioni dei gruppi in isomorfismo meriedrico con G_r -

§ 97

Serie di composizione di due gruppi isomorfi - Teorema di Hölder-Engel

Supponiamo nuovamente che il gruppo G'_{r-q} sia in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, o, ciò che è lo stesso, che G'_{r-q} sia il gruppo complementare di G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q:

$$G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$$

Ad ogni sottogruppo G'_s invariante in G'_{r-q} ne corrisponde uno G_{s+q} invariante in G_r (§ 95); e si vede anche subito che se G'_s è invariante massimo in G'_{r-q}, tale sarà pure G_{s+q} in G_r, e viceversa. In particolare:

Il gruppo complementare $G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$ di un gruppo G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q è semplice se G_q è invariante massimo in G_r, composto nel caso contrario -

Più in generale consideriamo una serie di composizione di G'_{r-q}, sia

(α) $\quad G'_{r-q}\,,\; G'_{r-q'}\,,\; G'_{r-q''} \,\ldots\ldots\, G'_{r-q^{(s)}}\,,\; 1,$

e indichiamo con

(β) $\quad G_r\,,\; G_{r+q-q'}\,,\; G_{r+q-q''} \,\ldots\, G_{r+q-q^{(s)}}\;\; G_q$

i corrispondenti sottogruppi in G_r; ciascuno di questi sarà invariante massimo nel precedente, per cui la (β)

formerà il principio di una serie di composizione di G_r da G_r fino a G_q, alla quale basterà aggiungere una serie di composizione di G_q per avere una serie completa di composizione del gruppo G_r. Di qui si vede che qualunque sottogruppo invariante G_q di G_r può essere inserito in una serie di composizione di G_r; gli indici di composizione di G_r si ottengono associando agli indici di composizione del gruppo complementare $\frac{G_r}{G_q}$ quelli di G_q stesso.

Riprendiamo a considerare una serie qualunque di composizione di G_r, sia

$$G_r, G_{r_1}, G_{r_2} \ldots\ldots G_{r_q}, 1$$

e costruiamo i gruppi complementari di ciascun gruppo della serie rispetto al seguente

$$\frac{G_r}{G_{r_1}}, \frac{G_{r_1}}{G_{r_2}}, \frac{G_{r_2}}{G}, \ldots\ldots, \frac{G_{r_{q-1}}}{G_{r_q}}, G_{r_q}.$$

Siccome ciascuno G_{r_i} è invariante massimo nel precedente, questi gruppi complementari sono tutti semplici e per ciascuno il numero dei parametri eguaglia il corrispondente indice di composizione; indichiamoli adunque

$$(\gamma) \quad H_{r-r_1}, H_{r_1-r_2} \ldots\ldots H_{r_{q-1}-r_q} \quad H_{r_q} \ (\equiv G_q)$$

Il teorema di Jordan-Lie (§66) stabilisce che, se si considera un'altra serie qualunque di composizione e si costruiscono i corrispondenti gruppi complementari

$$(\gamma^*) \quad H'_{r-\rho_1}, H'_{\rho_1-\rho_2} \ldots\ldots,$$

i numeri (indici di composizione), che danno per ciascun gruppo della serie (γ) il numero dei parametri, coincidono, salvo l'ordine, con quelli analoghi nella serie (γ^*).

Ma si può dimostrare molto di più e cioè che non soltanto i numeri dei parametri dei gruppi complementari nelle due serie (γ), (γ^*) ma i gruppi stessi, salvo l'ordine, coincidono (sono oloedricamente isomorfi) -

Nella teoria dei gruppi di sostituzioni questo teorema fu dimostrato la prima volta da Hölder, venne esteso poi da Engel ai gruppi continui - Lo diciamo perciò il teorema di Hölder-Engel e lo enunciamo nel modo seguente:

a) In due diverse serie di composizione di un medesimo gruppo G_r i gruppi complementari di ciascun gruppo rispetto al seguente, prescindendo dall'ordine, sono gli stessi.

Per dimostrarlo basterà riprendere il teorema del §65, che serve di fondamento alla dimostrazione del teorema di Jordan-Lie, e completarlo nel modo seguente:

b) Se un gruppo G_r possiede due diversi sottogruppi invarianti massimi G_{r_1}, $G_{r_1'}$ e Γ_h è il sottogruppo comune a G_{r_1}, $G_{r_1'}$, i due gruppi complementari

$$\frac{G_r}{G_{r_1}}, \quad \frac{G_{r_1'}}{\Gamma_h}$$

sono identici (oloedricamente isomorfi) come gli altri due

$$\frac{G_r}{G_{r_1'}} \quad , \quad \frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$$

Conviene ricordare per la dimostrazione che si ha $h = r_1 + r_1' - r$, indi $r - r_1 = r_1' - h$, $r_1 - r_1' = r_1 - h$ e che Γ_h' è invariante massimo sì in G_{r_1} che in $G_{r_1'}$ (§ 65).

Ora riprendendo le notazioni del § 65 pongasi

$$\Gamma_h' \equiv (X_1 X_2 \dots X_h)$$

$$G_{r_1} \equiv (X_1 X_2 \dots\dots X_h ; X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

$$G_{r_1'} \equiv (X_1 X_2 \dots X_h ; Y_{h+1} \dots Y_{r_1'})$$

e si avrà

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_h Y_{h+1} \dots Y_{r_1'} ; X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

Si osservi subito che le trasformazioni infinitesime di G_{r_1} si formano aggregando a quelle del sottogruppo invariante (massimo) Γ_h' le

$$(S) \qquad X_{h+1} \dots X_{r_1}$$

e nello stesso modo si formano quelle di G_r da quelle di $G_{r_1'}$ aggregando a queste le medesime (S). Ora, secondo quanto è osservato alla fine del paragrafo precedente, le costanti di composizione del gruppo complementare

$$\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h'}$$

si formano costruendo le trasformazioni alternate fra le (S)

$$(X_{h+i} \, , \, Y_{h+j})$$
$$i, j = 1, 2 \dots r_1 - h$$

e nelle loro espressioni lineari per

$$X_1\ X_2 \ldots X_h ; X_{h+1} \ldots X_r$$

prendendo i coefficienti di $X_{h+1} \ldots X_r$; questi sono le costanti di composizione di $\frac{G_r}{\Gamma_h}$. Se procediamo nello stesso modo per formare le costanti di composizione di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ siccome le trasformazioni infinitesime da aggregarsi a quelle di G_{r_1} per avere quelle di G_r sono le stesse (S), le costanti di composizione di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ sono le stesse che per $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$, cioè i due gruppi sono oloedricamente isomorfi. Lo stesso vale naturalmente di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$, $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$ e la proposizione b) è così dimostrata.

Dopo ciò basta riprendere la dimostrazione del teorema di Jordan - Lie (§66), supponendo che il teorema a) di Hölder sussista pei gruppi con meno di r parametri. Allora se

$$(6)\quad G_r\ G_{r_1}\ G_{r_2} \ldots\ldots G_{r_q}\ 1$$

$$(7)\quad G_r\ \Gamma_{\rho_1}\ \Gamma_{\rho_2} \ldots\ldots \Gamma_{\rho_q}\ 1$$

sono due diverse serie di composizione di G_r, e con Γ_h si indica il sottogruppo comune di G_{r_1}, Γ_{ρ_1} con

$$\Gamma_h\ \Gamma_{h_1}\ \Gamma_{h_2} \ldots 1$$

una serie di composizione di Γ_h, abbiamo le altre due serie di composizione di G_r

$$(6^*)\quad G_r\ G_{r_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1} \ldots\ldots 1$$

$$(7^*)\quad G_r\ \Gamma_{\rho_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1} \ldots\ldots 1$$

Le due serie (6)(6*) hanno gli stessi gruppi complementari perché il primo $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ è comune ed essendo $r_1 < r$ da G_{r_1} in poi i gruppi complementari rimangono per ipotesi gli stessi (salvo l'ordine); lo stesso dicasi di (7).(7*) - Basta dunque dimostrare che (6*).(7*) hanno gli stessi gruppi complementari. Ora da Γ_h in poi è evidente perché le due serie da quel punto coincidono. Per i primi due

$$\frac{G_r}{G_{r_1}} \quad \frac{G_{r_1}}{\Gamma_h} \quad \text{per la (6*)}$$

$$\frac{G_r}{G_{r'_1}} \quad \frac{G_{r'_1}}{\Gamma_h} \quad \text{per la (7*)}$$

risulta dalla proposizione b) essendo $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ oloedricamente isomorfo con $\frac{G_{r'_1}}{\Gamma_h}$ e $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$ con $\frac{G_r}{G_{r'_1}}$.

§ 98

Costruzione di gruppi isomorfi a gruppi imprimitivi

Terminiamo queste prime ricerche sull'isomorfismo con un esempio di costruzione di un gruppo isomorfo ad un dato gruppo -

Sia $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ un gruppo sulle n variabili $x_1\ x_2 \dots x_n$ transitivo ed imprimitivo (§ 51) e sia

(8) $u_1(x_1 \dots x_n) = c_1 \ , u_2(x_1 \dots x_n) = c_2 \ \dots u_{n-q}(x_1 \dots x_n) = c_{n-q}$

una divisione dello spazio in ∞^{n-q} varietà V_q d'imprimitività, tale cioè che le trasformazioni di G_r o lascino ciascuna V_q in se stessa o permutino le V_q fra loro.
Considerando le varietà stesse come elementi è chiaro che esse vengono permutate fra loro secondo le trasformazioni di un gruppo continuo del quale andiamo ora a calcolare le trasformazioni infinitesime per dimostrare che esso è isomorfo con G_r -
Una trasformazione qualunque

$$x'_i = f_i(x, a)$$

di G_r eseguita entro le $u_1 \dots u_{n-q}$ le cangia (S. 51) in

$$u'_i = \varphi_i(u_1\, u_2 \dots u_{n-q}\, ;\, a_1 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots n-q$$

e queste formano sulle u un gruppo Γ indotto dal gruppo G_r sulle x - Il numero dei parametri di Γ può del resto essere inferiore ad r e ciò avviene quando esiste in G_r un sottogruppo (necessariamente invariante) che lascia fissa ogni singola varietà V_q, a cui corrisponde cioè l'identità in Γ.
Per calcolare le trasformazioni infinitesime di Γ basta considerare che esse sono indotte dalle trasformazioni infinitesime $X_k f$ di G_r sulle x - Agli accrescimenti

$$\delta x_i = \xi_{ki}\, \delta t$$

impartiti alle x da $X_k f$ corrispondono gli accresci-

menti;

$$\delta u_j = \delta t \sum \xi_{ki} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = X_k(u_j)\delta t$$

sulle u. Ricordiamo ora (§. 52) che, essendo la (8) una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività, le espressioni $X_k(u_j)$ sono funzioni delle sole u, poniamo

$$X_k(u_j) = \omega_{kj}(u_1 u_2 \cdots u_{n-q});$$

dunque la trasformazione infinitesima $X_k f$ sulle x produce sulle u la trasformazione infinitesima:

$$(9) \qquad U_k \Phi = \sum_j^{1\dots n-q} \omega_{kj}(u) \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}$$

$$(k = 1, 2 \dots r)$$

Le trasformazioni infinitesime di Γ sono certo fra queste, le quali per altro possono non essere tutte indipendenti. In ogni caso verifichiamo che esse hanno la stessa composizione di $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$, che cioè con

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

si ha anche

$$(U_k U_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s \Phi$$

Si osservi perciò che esprimendo in una funzione Φ delle u le u per le x si ha identicamente

$$(10) \qquad U_j \Phi = X_j \Phi$$

Ora

$$(11) \qquad (U_k U_l) = \sum_\nu^{1\dots r-q} \left\{ U_k(\omega_{l\nu}) - U_l(\omega_{k\nu}) \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu} =$$

$$= \sum_\nu^{1\dots r-q} \left\{ X_k(\omega_{l\nu}) - X_l(\omega_{k\nu}) \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu};$$

ma dall'identità

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

ponendovi $f = u_\nu$ segue

$$X_k(X_l(u_\nu)) - X_l(X_k(u_\nu)) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s(u_\nu) ,$$

cioè per la (10)

$$X_k(U_l(u_\nu)) - X_l(U_k(u_\nu)) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s(u_\nu)$$

ossia

$$X_k(\omega_{l\nu}) - X_l(\omega_{k\nu}) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls}\, \omega_{s\nu}$$

Per ciò la (11) diventa

$$(U_k . U_l) = \sum_\nu^{1\dots n-q} \sum_s^{1\dots r} c_{kls}\, \omega_{s\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu} = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s \Phi ,$$

che è appunto quello che volevasi dimostrare. Si conclude di qui:

Il gruppo Γ indotto sui sistemi d'imprimitività è sempre isomorfo col gruppo imprimitivo dato G_r. L'isomorfismo sarà meriedrico d'ordine q se fra le r trasformazioni $U_k\Phi$ date dalle (9) ve ne siano $r-q$ soltanto indipendenti —

Si osserverà che in ogni caso avremo $q < r$ perchè in caso opposto sarebbero tutte le $U_k\Phi$, cioè tutte le $\omega_{kj} = X_k(u_j)$, identicamente nulle e il gruppo G_r, avendo allora gli invarianti $u_1\, u_2 \dots\dots u_{n-q}$, sarebbe intransitivo contro l'ipotesi

I risultati precedenti prendono un aspetto molto semplice se, operando un cangiamento di variabili, si suppone che siano

$$x_1 = c_1 \;,\; x_2 = c_2 \dots\dots x_{n-q} = c_{n-q}$$

i sistemi d'imprimitività. In tal caso nelle trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

i primi n-q coefficienti

$$\xi_{k1} \quad \xi_{k2} \dots\dots \xi_{k,n-q}$$

non contengono le variabili $x_{n-q+1} \dots x_n$ e le trasformazioni generatrici di Γ sono le trasformazioni accorciate

$$\overline{X_k f} = \sum_i^{1\dots n-q} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Del resto è evidente che scelte le variabili in questo modo il gruppo G_r opera sulle prime n-q variabili $x_1 \dots x_{n-q}$ senza mescolarle colle altre; in quanto opera su queste esso non è altro che il gruppo Γ.

§ 99

Definizione dei gruppi parametrici

Per approfondire lo studio dell'isomorfismo, come per altre questioni della teoria dei gruppi continui e loro applicazioni, è importante introdurre la nozione di due gruppi aggregati, come il gruppo aggiunto, ad un dato gruppo G_r e che portano il nome di gruppi parametrici.

Il concetto di gruppo parametrico di un dato gruppo G_r è facile ad intendersi a priori e corrisponde per un gruppo di sostituzioni d'ordine n a porlo in

relazione d'isomorfismo oloedrico con un gruppo dello stesso ordine di sostituzioni sopra n elementi. Come il gruppo aggiunto (§ 67) indica il modo secondo cui le trasformazioni del gruppo G_r si permutano, trasformate con una medesima di G_r, così i gruppi parametrici indicano come tutte le trasformazioni di G_r si permutano moltiplicandole contemporaneamente a destra o a sinistra per una medesima trasformazione di G_r; e secondo appunto che la trasformazione moltiplicatrice si pone a destra o a sinistra si avrà il primo od il secondo gruppo parametrico.

Sviluppando questo concetto fondamentale, consideriamo un gruppo G_r, la cui trasformazione generica

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n ;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

indichiamo al solito con S_a. Due trasformazioni S_a, S_b di G_r si compongono in una terza S_c:

$$(12) \qquad S_a S_b = S_c$$

e i parametri $c_1\, c_2 \ldots c_r$ della trasformazione composta S_c sono dati dalle formole

$$(13) \qquad c_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \ldots a_r ;\, b_1\, b_2 \ldots b_r)$$

che sono risolubili tanto rispetto alle a che alle b (§ 86).

Ora dimostriamo che riguardando in queste formole le a come variabili, le b come parametri, esse definiscono un gruppo di trasformazioni sulle variabili a coi parametri essenziali b; e similmente ri-

guardando invece le $\underline{b}$ come variabili e le $\underline{a}$ come parametri definiscono un secondo gruppo sulle variabili $\underline{b}$ coi parametri $\underline{a}$.

Riguardiamo infatti nell'equazione simbolica (12) le $\underline{a}$ come variabili che indichiamo con $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_r$ e le $\underline{b}$ come fisse; saranno allora le $\underline{c}$ variabili che indicheremo con $\xi'_1\ \xi'_2 \dots \xi'_r$ e l'equazione simbolica

$$(12^*) \qquad S_{\xi'} = S_\xi S_b \,.$$

e le effettive

$$\xi'_i = \varphi_i(\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_r;\ b_1\ b_2 \dots b_r),$$

indicheranno ~~come~~ si permutano tutte le trasformazioni S_ξ a r moltiplicandole a destra per una fissa S_b. Ora a ~~ver~~ moltiplicano nuovamente tutte le $S_{\xi'}$ a destra per una fissa S_c e si suppone

$$(14) \qquad S_{\xi''} = S_{\xi'} S_c$$

si avrà

$$(14^*) \quad \xi''_i = \varphi_i(\xi'_1\ \xi'_2 \dots \xi'_r;\ c_1\ c_2 \dots c_r)$$

Dalle (12*) (14) segue

$$S_{\xi''} = S_\xi (S_b S_c)$$

e se poniamo

$$S_b S_c = S_\gamma$$

cioè

$$\gamma_i = \varphi_i(b_1\ b_2 \dots b_r;\ c_1\ c_2 \dots c_r)$$

avremo

$$S_{\xi''} = S_\xi S_\gamma$$

e quindi

(15) $\quad \xi''_i = \varphi_i(\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r\,;\, \gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_r)$

Ciò dimostra che due successive trasformazioni della serie (13*) cioè la (13*) e la (14*) si compongono in una terza (15) della medesima serie, i nuovi parametri γ essendo funzioni dei parametri b, e delle componenti, e resta così provato quanto abbiamo enunciato.

Il gruppo (13*) sulle variabili ξ è transitivo perchè le (13*) sono risolubili rispetto ai parametri b; esso è quindi un gruppo Π_r semplicemente transitivo cogli r parametri b. Secondo quanto abbiamo detto al principio del paragrafo Π_r è il primo gruppo parametrico del gruppo dato G_r.

Del tutto analogamente se nella relazione

$$S'_a S'_b = S'_c$$

riguardiamo le a come parametri e le b come variabili ξ e scriviamo

$$S'_a S'_\xi = S'_{\xi'}$$

ne risulta

$$S'_b S'_{\xi'} = (S'_b S'_a) S'_\xi = S'_c S'_\xi = S'_{\xi''}$$

Come sopra ne segue che le formole

$$\xi'_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \dots a_r\,;\, \xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r)$$

definiscono un secondo gruppo Π'_r semplicemente transitivo sulle r variabili ξ cogli r parametri a; questo Π'_r è il secondo gruppo parametrico.

E' facile ora vedere che i due gruppi parametrici

Π_r, Π_r' sono reciproci l'uno dell'altro, per la qual cosa basta provare (§ 90) che le trasformazioni dell'uno sono permutabili con quelle dell'altro. E infatti se T_b è una trasformazione qualunque di Π_r rappresentata simbolicamente da

$$T_b) \qquad S_\xi' S_b' = S_{\xi'}'$$

e T_a' una qualunque di Π_r' rappresentata da

$$T_a') \qquad S_a' S_{\xi'} = S_{\xi''}$$

avendosi

$$S_a(S_\xi' S_b') = (S_a' S_\xi) S_b' = S_{\xi''}$$

ne risulta appunto

$$T_b T_a' = T_a' T_b$$

Secondo i teoremi del § 85 i due gruppi parametrici Π_r, Π_r' sono simili, la qual cosa risulta anche subito dal dedurre dall'equazione simbolica

$$S_\xi' S_b' = S_{\xi'}'$$

che definisce le trasformazioni di Π_r l'altra

$$S_b'^{-1} S_\xi'^{-1} = S_{\xi'}'^{-1}$$

e dall'osservare che le S^{-1} percorrono in altro ordine le trasformazioni di G_r. Sotto questa seconda forma abbiamo dunque le trasformazioni del secondo gruppo Π_r' –

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nel teorema: Se si considera un gruppo G_r qualunque

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 \dots x_n; a_1 a_2 \dots a_r)$$

e si suppone che due sue trasformazioni qualsiasi S_a, S_b

si compongano in una terza S_c colle formole

$$c_i = \varphi_i(a_1 a_2 \ldots a_r ; b_1 b_2 \ldots b_r)$$

queste ci danno le equazioni finite di due gruppi semplicemente transitivi e reciproci Π_r, Π'_r (indi simili), i gruppi parametrici di G_r — Il primo si ottiene riguardando nelle formole superiori le $\underline{a}$ come variabili le $\underline{b}$ come parametri, il secondo invertendo l'interpretazione —

Si osservi in fine che ciascuno dei due gruppi parametrici ha per gruppi parametrici se stesso e l'altro gruppo —

§.100

Trasformazioni infinitesime del primo gruppo parametrico

D'ora innanzi basterà che ci limitiamo a considerare il primo gruppo Π_r, che diremo senz'altro il gruppo parametrico, l'altro Π'_r essendo da questo determinato come suo gruppo reciproco — Il gruppo parametrico Π_r sarà generato da $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime, che vogliamo innanzi tutto calcolare.

Per questo cominciamo dall'osservare che fra le trasformazioni S_b di G_r e quelle T_b di Π_r viene stabilita una corrispondenza biunivoca secondo l'equazione simbolica

$$(16) \qquad S_a S_b = S_{a'}$$

o le effettive

(16*) $$a'_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \dots a_r ; b_1 \dots b_r)$$

dove riguardando le b come parametri le a come variabili si hanno appunto le formole per la trasformazione T_b di Π_r. Si vede poi subito che la detta corrispondenza è tale che se ad S_b, S_β corrispondono T_b, T_β al prodotto $S_b S_\beta$ in G_r corrisponderà il prodotto $T_b T_\beta$ in Π_r. Per ciò ad ogni sottogruppo G_m di G_r corrisponde un sottogruppo Π_m in Π_r, in particolare ad un G_1 in G_r un Π_1 in Π_r.

Basterà caratterizzare questi sottogruppi Π_1 ad un parametro in Π_r per trovare altresì le trasformazioni infinitesime di Π_r. Questo si è già fatto in sostanza al § 16; ora non facciamo che riprendere quelle considerazioni giovandoci della nozione attuale di gruppo parametrico.

Supponiamo che pei valori $a^{(0)}$ dei parametri la $S_{a^{(0)}}$ diventi l'identità e facciamo percorrere nella (16) alla S_b un sottogruppo ad un parametro G_1 di G_r; esprimiamo le b in funzione di un parametro t supponendo che a $t=0$ corrisponda la trasformazione identica, cioè che sia $b_i = a_i^{(0)}$ per $t=0$. Le formole (16*) che scriviamo

$$a'_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \dots a_r ; t)$$

definiranno un sottogruppo Π_1 di Π_r, l'identità corrispondendo anche qui a $t=0$ — Tenendo fisse

le e la $S_{a'}$ percorre in G_r una serie ∞^1 di trasformazioni date dalle formole

(17) $$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ;\, a'_1\, a'_2 \ldots a'_r)$$

e le x'_i considerate come funzioni di t, soddisfano ad equazioni differenziali della forma (87)

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \xi_{ki}(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n),$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ costanti. Ma per le equazioni differenziali fondamentali scritte sotto la forma (B) § 8 si ha

$$\xi_{ki}(x') = \sum_j \alpha_{kj}(a'_1\, a'_2 \ldots a'_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a'_j}$$

quindi

(18) $$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_{k,j}^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a') \frac{\partial x'_i}{\partial a'_j}.$$

Ora dalla (17) si ha

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial x'_i}{\partial a'_j} \frac{da'_j}{dt}$$

e paragonando con (18)

$$\sum_j^{1\ldots r} \frac{\partial x'_i}{\partial a'_j} \left\{ \frac{da'_j}{dt} - \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a') \right\} = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

Siccome i parametri $a'_1\, a'_2 \ldots a'_r$ sono essenziali nelle (17) le quantità che sotto la sommatoria moltiplicano $\frac{\partial x'_i}{\partial a'_j}$ sono (pel § 2) necessariamente nulle, cioè si ha

$$\frac{da'_j}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a')$$

Il sottogruppo Π_1 è adunque generato dalla tra-

sformazione infinitesima

$$\sum_k^{1\dots r} \lambda_k \sum_j^{1\dots r} \alpha_{kj}(a_1\, a_2 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \;;$$

ne deduciamo: Se le equazioni differenziali fondamentali di un gruppo G_r

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \dots a_r)$$

si scrivono

$$\xi_{ji}(x'_1 \dots x'_n) = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\,,$$

le r trasformazioni infinitesime del (primo) gruppo parametrico Π_r sono date dalle r espressioni

$$A_k f = \sum_j^{1\dots r} \alpha_{kj}(a_1\, a_2 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j}$$

$$k = 1, 2 \dots r$$

Ricordiamo che queste espressioni $A_k f$ si presentarono già al § 19, ove si vede che il sistema

$$X'_k F + A_k F = 0$$

$$(k = 1, 2 \dots r)$$

sulle $n+r$ variabili x', a è un sistema completo e se con $F_1, F_2 \dots F_r$ se ne indicano le soluzioni principali che per $a_i = a_i^{(0)}$ si riducono a $x'_1\, x'_2 \dots x'_n$, le formole

$$F_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n\, ;\, a_1\, a_2 \dots a_r) = x_i$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

danno le equazioni in termini finiti del gruppo G_r, risolute rapporto alle x. Al § 20, sviluppando le condizioni d'integrabilità, si vede ancora che su-

sisteranno simultaneamente le formole di composizione

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

$$(A_i A_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} A_s f$$

Ne segue l'importante teorema:

Ogni gruppo G_r ha eguale composizione del suo primo (o secondo) gruppo parametrico, ossia è oloedricamente isomorfo con esso.

§. 101
Gruppi parametrici equivalenti

Il gruppo parametrico Π_r di un dato gruppo G_r cangia naturalmente di forma quando sui parametri a primitivi si eseguisca una trasformazione qualunque

(19) $\qquad a_i = \theta_i(b_1 b_2 \dots b_r) \qquad i = 1, 2 \dots r$

Conoscendo le trasformazioni infinitesime

$$A_k f = \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(a_1\, a_2 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

del primo gruppo Π_r, quelle del nuovo gruppo parametrico si otterranno semplicemente trasformando le $A_k f$ dalle variabili $\underline{a}$ alle variabili $\underline{b}$ colle formole (19).

Il gruppo Π_r essendo semplicemente transitivo se abbiamo un secondo gruppo

$$\overline{\Pi}_r \equiv (B_1 f, B_2 f, \dots B_r f)$$

$$B_k f = \sum_i^{1\dots r} \beta_{ki}(b_1 \dots b_r) \frac{\partial f}{\partial b_i}$$

pure semplicemente transitivo ed egualmente composto, esisterà certo (§85) una trasformazione delle a nelle b che cangierà Π_r in $\overline{\Pi}_r$ e nei nuovi parametri b il gruppo parametrico di G_r sarà precisamente $\overline{\Pi}_r$.

Vediamo quindi che, dato un gruppo G_r sulle n variabili x mediante le sue trasformazioni infinitesime

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$$

qualunque gruppo

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \dots A_r f)$$

$$A_k f = \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

semplicemente transitivo sulle r variabili a e di eguale composizione di G_r può assumersi come gruppo parametrico di G_r.

Se si vogliono poi le equazioni finite di G_r sotto quella forma cui corrisponde come gruppo parametrico $\Pi_r \equiv (A_1 A_2 \dots A_r)$ basterà procedere nel modo indicato alla fine del paragrafo precedente. E cioè supposto che facendo corrispondere alla $X_k f$ la $A_k f$ le costanti di composizione di G_r, Π_r siano le stesse, bisognerà integrare il sistema completo

$$X'_k F + A_k F = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots r)$$

e preso le sue soluzioni principali

$$F_1', F_2' \dots F_n'$$

che per $a_i = a_i^{(0)}$ si riducono rispettivamente a $x_1', x_2' \dots x_n'$ risolvere le n equazioni

$$F_i'(x_1' x_2' \dots x_n' ; a_1 a_2 \dots a_r) = x_i$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

rapporto alle x_i'.

In particolare, siccome il gruppo parametrico

$$a_i' = \varphi_i(a_1 a_2 \dots a_r ; b_1 b_2 \dots b_r)$$

ha per gruppo parametrico sé stesso, se supponiamo che l'identità debba corrispondere ai valori $b = a^{(0)}$ dei parametri, si avrà il teorema:

Note le trasformazioni infinitesime

$$(k = 1, 2 \dots r) \qquad A_k f = \sum_i^{1 \dots r} \alpha_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

del gruppo parametrico, le sue equazioni finite si otterranno nel modo seguente: Del sistema completo di r equazioni

$$\sum_i^{1 \dots r} \alpha_{ki}(a_1' \dots a_r') \frac{\partial F}{\partial a_i'} + \sum_i^{1 \dots r} \alpha_{ki}(b_1 b_2 \dots b_r) \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0$$

$$k = 1, 2 \dots r$$

nelle $2r$ variabili a', b si determinino le r soluzioni principali $\Phi_i(a_1' \dots a_r' ; b_1 \dots b_r)$ che per $b_i = a_i^{(0)}$ si riducono rispettivamente ad $a_1', a_2' \dots a_r'$ e traendo dalle r equazioni

$$\Phi_i(a_1' \dots a_r' ; b_1 \dots b_r) = a_i$$

$$i = 1, 2 \dots r$$

le a' in funzione delle a e delle b si avranno le richie-

ste equazioni del gruppo parametrico in cui l'identità corrisponde ai valori $b = a^{(0)}$ dei parametri.

Ricordiamo poi che col processo di Schur per la dimostrazione del terzo teorema fondamentale, date le r^3 costanti c_{iks} di composizione abbiamo imparato a costruire con sole operazioni algebriche r trasformazioni infinitesime indipendenti in r variabili $a_1 \dots a_r$

$$A_k f = \sum_{i}^{1 \dots r} \alpha'_{ki} (a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

della prescritta composizione – Queste generano un gruppo Π_r semplicemente transitivo sulle $\underline{a}$, che può essere assunto come gruppo parametrico per tutti i gruppi G_r di composizione c_{iks}. Dunque:

Date le costanti di composizione di un gruppo G_r, e tanto più date le sue trasformazioni infinitesime, si possono calcolare con sole operazioni algebriche (senza alcuna integrazione) le trasformazioni infinitesime del suo gruppo parametrico.

§.102

Isomorfismo oloedrico in relazione colle trasformazioni finite

---

Colle nozioni acquistate sui gruppi parametrici riprendiamo ora lo studio dell'isomorfismo fra i gruppi per dimostrare che se ne può dare una

seconda definizione, riferendosi alle trasformazioni finite anzichè alle infinitesime; in tal modo il concetto d'isomorfismo diventa perfettamente analogo a quello dei gruppi discontinui.

Cominciamo dall'osservare che se due gruppi G_r, G'_r hanno a comune il gruppo parametrico Π_r essi sono certamente d'egual composizione perchè egualmente composti col gruppo parametrico.

È facile anche vedere inversamente, dopo le ricerche del paragrafo precedente, che:

Due gruppi G_r, G'_r egualmente composti, ove se ne scrivano convenientemente le equazioni finite, hanno a comune il primo gruppo parametrico.

Siano infatti le trasformazioni infinitesime di G_r, G'_r rispettivamente

$$X_1 f, \; X_2 f \dots X_r f \quad \text{per } G_r$$

$$Y_1 f, \; Y_2 f \dots Y_r f \quad \text{per } G'_r,$$

e supponiamo che facendo corrispondere a $X_k f$ la $Y_k f$ le costanti di composizione dei due gruppi siano le stesse. Siano poi

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n; a_1 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

le equazioni finite del primo gruppo e

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \dots A_r f)$$

$$A_k f = \sum_i^{1 \dots r} \alpha_{ki}(a) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

il corrispondente gruppo parametrico – Il gruppo Π_r, semplicemente transitivo, ha la composizione stessa di G_r, quindi quella di G'_r – Pel paragrafo precedente possiamo quindi scrivere le equazioni finite di G'_r nelle corrispondenti variabili $y_1\, y_2 \cdots y_m$, diciamo

$$y'_i = F_i(y_1\, y_2 \cdots y_m\, ;\, a_1\, a_2 \cdots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots m$$

in guisa che il gruppo parametrico di G'_r sia ancora Π_r –

Supponiamo ora scritte le equazioni finite dei due gruppi G_r, G'_r egualmente composti

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \ldots a_r) \quad i = 1, 2 \ldots n$$
$$y'_j = F_j(y_1\, y_2 \cdots y_m\, ;\, a_1\, a_2 \cdots a_r) \quad j = 1, 2 \ldots m$$

in guisa appunto che abbiano a comune il primo gruppo parametrico $a''_i = \varphi_i(a, b)$

Ad ogni trasformazione finita S_a di G_r facciamo corrispondere quella S'_a di G'_r che ha i medesimi parametri; poichè il gruppo parametrico è comune, se si ha

$$S_a S_b = S_c\,,$$

sarà ancora

$$S'_a S'_b = S'_c$$

Troviamo così l'importante teorema:

c) Due gruppi G_r, G'_r sono egualmente composti solo quando è possibile stabilire fra le loro trasformazioni

finite una corrispondenza biunivoca tale che al prodotto di due trasformazioni qualunque in G_r corrisponda sempre il prodotto, nel medesimo ordine, delle due trasformazioni corrispondenti in G'_r.

La relazione fra i due gruppi è così precisamente quella che porta il nome d'isomorfismo oloedrico nella teoria dei gruppi discontinui (finiti o infiniti). È facile vedere che i due gruppi G_r, G'_r saranno così appunto oloedricamente isomorfi nel senso definito al §. 94, riferendosi alle trasformazioni infinitesime.

E infatti la corrispondenza così definita fra le trasformazioni finite di G_r, G'_r implica una corrispondenza fra i sottogruppi ad un parametro dei due gruppi e quindi fra le loro trasformazioni infinitesime generatrici. Si corrisponderanno due trasformazioni infinitesime dei due gruppi G_r, G'_r quando corrispondano ad una stessa del gruppo parametrico comune; si vede subito quindi che se ad Xf, Yf in G_r corrispondono $X'f$, $Y'f$ in G'_r, alla (XY) corrisponderà $(X'Y')$. I due gruppi G_r, G'_r sono dunque posti in relazione d'isomorfismo oloedrico nel senso del §94.

Viceversa se i due gruppi G_r, G'_r sono posti in relazione d'isomorfismo oloedrico nel senso primitivo (§94) facendo corrispondere alle trasformazioni generatrici

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_r f \text{ di } G_r$$

$$\text{le } \quad Y_1 f, Y_2 f \ldots\ldots Y_r f \text{ di } G'_r \; ,$$

vediamo che si può ulteriormente precisare una corrispondenza fra le trasformazioni finite dei due gruppi, che soddisfi alle condizioni enunciate in [?], cioè risponda alla definizione d'isomorfismo dei gruppi discontinui e lasci sussistere la corrispondenza già fissata fra le trasformazioni infinitesime di G_r, G'_r (fra i loro sottogruppi ad un parametro).

Le costanti di composizione per le $X_k f$ e per le $Y_k f$ essendo le stesse, si può, per quanto si è visto al principio del paragrafo, scrivere le equazioni finite dei due gruppi G_r, G'_r

$$(20) \qquad x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n ; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

$$(20^*) \qquad y'_j = F_j(y_1\, y_2 \ldots y_m ; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

in guisa che abbiano a comune il gruppo parametrico

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \ldots\ldots A_r f)$$

$$A_k f = \sum_i^{1\ldots r} \alpha_{ki}(a_1 \ldots\ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

Ora la corrispondenza fissata fra le trasformazioni infinitesime di G_r e G'_r fa corrispondere a $\sum_i^{1\ldots r} e_i X_i f$ la trasformazione infinitesima $\sum_i^{1\ldots r} e_i Y_i f$.

Questi simboli $\sum e_i X_i f$, $\sum e_i Y_i f$ possono anche riguardarsi come simboli delle rispettive trasforma-

zioni finite dei due gruppi, scritte sotto forma canonica:

$$(21) \quad x_i' = x_i + \sum_k e_k X_k x_i + \sum_{k,j} \frac{e_k e_j}{1.2} X_k X_j x_i + \dots$$

$$(21^*) \quad y_i' = y_i + \sum_k e_k Y_k y_i + \sum_{k,j} \frac{e_k e_j}{1.2} Y_k Y_j y_i + \dots$$

Stabiliamo appunto di far corrispondere alla trasformazione finita $\sum_i e_i X_i f$ di G_r l'altra $\sum_i e_i Y_i f$ di G_r' e sarà mantenuta la corrispondenza già fissata fra le trasformazioni infinitesime. Di più se dimostriamo che le equazioni canoniche dei due gruppi (21), (21*) hanno ancora a comune il gruppo parametrico, sarà provato quanto si voleva. Ora sotto la forma primitiva (20), (20*) i due gruppi G_r, G_r' avevano appunto il medesimo gruppo parametrico —

Per ridurre il gruppo G_r dalla forma (20) alla canonica (21) dobbiamo, secondo il § 68, determinare i parametri $a_1\, a_2 \dots a_r$ in funzione dei parametri

$$e_1 = \lambda_1 t\,, \quad e_2 = \lambda_2 t \quad \dots \quad e_r = \lambda_r t$$

dalle equazioni differenziali ivi segnate (A)

$$(A) \qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\dots r} \lambda_s \alpha_{sk}(a_1 \dots a_r)$$

colle condizioni iniziali $a_k = a_k^{(0)}$ per $t=0$ —

Ma le medesime equazioni (A) si presentano anche per la riduzione delle (21) alle (21*) perchè le $\alpha_{sk}(a)$ rimangono le stesse; dunque le (21), (21*) hanno a comune il gruppo parametrico, che si

ottiene dal primitivo Π_r passando dai parametri a ai parametri canonici e.

§ 103
Isomorfismo meriedrico

Dimostriamo ora che anche la definizione di isomorfismo meriedrico, data al § 94 in base alla corrispondenza fra le trasformazioni infinitesimali, si può completare con una tale corrispondenza fra le trasformazioni finite da rispondere perfettamente alla definizione d'isomorfismo meriedrico dei gruppi discontinui.

Supponiamo che il gruppo

$$G'_{r-q} \equiv (Y_1 f, Y_2 f \dots Y_{r-q} f)$$

sia in isomorfismo meriedrico d'ordine q col gruppo

$$G_r \equiv (X_1 f, X_2 f \dots X_r f)$$

e precisamente che all'identità in G'_{r-q} corrisponda in G_r il sottogruppo invariante

$$G_q \equiv (X_{r-q+1} f \dots X_r f)$$

Le espressioni alternate

$$(X_i X_k) \begin{cases} i = 1, 2, \dots r \\ k = r-q+1, r-q+2, \dots r \end{cases}$$

si esprimeranno quindi tutte linearmente con coefficienti costanti per

$$X_{r-q+1} f, \dots X_r f$$

Sia ora

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \dots A_r f)$$

una forma del gruppo parametrico di G_r - Poichè le costanti di composizione per le $A_i f$ sono le stesse che per le $X_i f$, anche

$$(A_i A_k) \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = r-q+1 \dots r \end{cases}$$

si esprimeranno linearmente per

$$A_{r-q+1} f \dots\dots A_r f$$

soltanto -

Le q equazioni

$$A_{r-q+1} f = 0 \quad \dots\dots \quad A_r f = 0$$

formano un sistema completo che ammette il gruppo Π_r. Prendiamo le $r-q$ soluzioni indipendenti di questo sistema per nuovi parametri $a_1\ a_2 \dots a_{r-q}$ -

Le varietà

$$a_1 = \text{cost}^{te},\ a_2 = \text{cost}^{te},\ \dots\dots\ a_{r-q} = \text{cost}^{te}$$

formeranno un sistema d'imprimitività rispetto al gruppo Π_r e per quanto è detto alla fine del § 98 le $A_k f$ prenderanno la forma seguente

$$A_k f = \sum_i^{1 \dots r-q} \alpha_{ki}(a_1\ a_2 \dots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} + \sum_i^{r-q+1 \dots r} \beta_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

per $k = 1, 2 \dots r-q$

$$A_k f = \sum_i^{r-q+1 \dots r} \beta_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

$k = r-q+1, \dots r$

essendo le α_{ki} funzioni solo di $a_1 \dots a_{r-q}$ e le ... di

tutte le a - Formando poi dalle $A_k f$ $(k=1, 2 \dots r-q)$ le trasformazioni associate

$$\bar{A}_k f = \sum_i^{1 \dots r-q} \alpha_{ki} (a_1 \dots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

$$k=1, 2 \dots r-q$$

queste saranno le generatrici del gruppo sui sistemi d'imprimitività in isomorfismo meriedrico d'ordine q con Π_r - Dal modo come si compongono le espressioni alternate $(A_i A_k)$ risulta subito che se si ha

$$(A_i A_k) = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} A_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r-q)$$

sarà anche

$$(\bar{A}_i \bar{A}_k) = \sum_s^{1 \dots r-q} c_{iks} \bar{A}_s f;$$

ma per l'~~isomorfismo~~ meriedrico di G'_{r-q} con G_r si ha

$$(Y_i Y_k) = \sum_s^{1 \dots r-q} c_{iks} Y_s f$$

perchè per ipotesi sono nulle $Y_{r-q+1} \dots Y_r$ -

Dunque le

$$\bar{A}_1 f, \ \bar{A}_2 f, \dots \bar{A}_{r-q} f$$

generano un gruppo Π'_{r-q} semplicemente transitivo della composizione di G'_{r-q}, che può quindi assumersi come suo gruppo parametrico. Ora se indichiamo con $B_k f$, $\bar{B}_k f$ le espressioni $A_k f$, $\bar{A}_k f$ in cui si mutino i parametri $a_1 a_2 \dots a_r$ in $b_1 b_2 \dots b_r$, le equazioni finite di Π'_{r-q} si otterranno integrando il sistema completo (§ 101)

$$\bar{A}'_k f + \bar{B}_k f = 0 \quad k=1, 2, \dots r-q$$

e quelle di Π_r integrando l'altro

$$A'_k f + B_k f = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

Le $r-q$ soluzioni indipendenti ~~del primo sono costantemente~~ soluzioni del secondo, e per ciò se alle equazioni finite di Π'_{r-q} si dà la forma

$$a'_i = \varphi_i (a_1\, a_2 \ldots a_{r-q} : b_1\, b_2 \ldots b_{r-q})$$
$$i = 1, 2, \ldots r-q,$$

a quelle di Π_r si può dare l'altra

$$a'_i = \varphi_i (a_1\; a_2 \ldots a_{r-q} ; b_1\; b_2 \ldots b_{r-q})$$
$$i = 1, 2, \ldots r-q$$
$$a'_j = \theta_j (a_1 \ldots a_r ; b_1 \ldots b_r)$$
$$j = r-q+1, \ldots r$$

Allora ad ogni trasformazione S'_a di G_r ne corrisponde una perfettamente determinata S'_a in G'_{r-q}; cioè quella che corrisponde ai valori stessi dei primi $r-q$ parametri $a_1\, a_2 \ldots a_{r-q}$ mentre ad una di G'_{r-q} ne corrispondono ∞^q in G_r, quelle che si ottengono mantenendo fissi i valori attuali di $a_1 \ldots a_{r-q}$ e facendo variare $a_{r-q+1} \ldots a_r$. La corrispondenza stabilita è poi manifestamente tale che al prodotto di due qualunque trasformazioni $S'_a . S'_a$ in G_r corrisponde il prodotto $S'_a\, S'_a$ delle corrispondenti in G'_{r-q} - Così è dimostrato appunto quanto si voleva.

§ 104
Ritorno alle condizioni di simiglianza fra due gruppi

Dopo queste nuove ricerche sull'isomorfismo dei gruppi riprendiamo il problema, che soltanto in parte abbiamo risoluto al Cap. VII, relativo alla simiglianza dei gruppi per risolverlo ora completamente. Al § 86 abbiamo già enunciato le condizioni B) necessarie per la simiglianza di due gruppi; resta a provare che esse sono sufficienti.

Per maggiore chiarezza ripetiamo qui l'enunciato del teorema che dobbiamo dimostrare:

I due gruppi a r parametri

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r) \;;\quad X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r) \;;\quad Y_k f = \sum_i \eta_{ki}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

degli spazi a $\underline{n}$ dimensioni $(x_1 \dots x_n)$, $(y_1 \dots y_n)$ si suppongono posti fra loro in relazione d'isomorfismo oloedrico facendo corrispondere alla $X_k f$ la $Y_k f$; si suppone inoltre che fra le prime q X

$$X_1 f,\ X_2 f \dots X_q f$$

non sussista alcuna relazione lineare omogenea (a coefficienti variabili), mentre

$$X_{q+1} f, \dots X_r$$

si esprimono per le prime q colle formole

$$(22)\qquad X_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x_1 \dots x_n) X_\lambda f \qquad (j=1,2\dots r-q),$$

e similmente si abbia

$$(22^*)\qquad Y_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \psi_{j\lambda}(y_1 \dots y_n) Y_\lambda f \qquad (j=1,2\dots r-q),$$

mentre fra $Y_1f \dots Y_qf$ non sussista alcuna relazione, ed infine che le $q(r-q)$ equazioni

$$(23)\qquad \varphi_{j\lambda}(x) = \psi_{j\lambda}(y) \quad \begin{cases} j=1,2\dots r-q \\ \lambda=1,2\dots q \end{cases}$$

siano compatibili, e non diano luogo nè a relazioni fra le sole x nè a relazioni fra le sole y. In tale ipotesi, si vuol dimostrare che esiste qualche trasformazione che cangia $X_1f, X_2f, \dots X_rf$ rispettivamente in $Y_1f, Y_2f \dots\dots Y_rf$.

Ricordiamo che il teorema è già stato dimostrato in due casi particolari, e cioè: 1° quando $q=r$ (§84), ossia quando si riduce a zero sì il numero delle $\varphi_{j\lambda}$ che quello delle $\psi_{j\lambda}$; 2° quando il numero delle $\varphi_{j\lambda}$ (o $\psi_{j\lambda}$) indipendenti è $=n$, caso dei gruppi asistatici -

Potremo quindi supporre d'ora avanti $q<r$, che cioè ogni punto generico dello spazio possieda un effettivo sottogruppo di stabilità G_{r-q} e che il numero $n-p$ delle φ o ψ indipendenti sia $<n$, cioè $p>0$ - I due gruppi sono quindi sistatici e le varietà sistatiche hanno per l'uno e per l'altro la

dimensione ρ (§ 53) - Del resto la dimostrazione che ora daremo comprenderà nuovamente il caso $\rho = 0$ dei gruppi sistatici -

I gruppi G_r, Γ_r essendo posti in relazione di isomorfismo oloedrico fra le loro trasformazioni, e quindi fra i loro sottogruppi viene stabilita una corrispondenza biunivoca - Consideriamo ora il sottogruppo di stabilità G_{r-q} relativo ad un punto generico $x^{(0)}$ del primo gruppo, che è generato dalle $r-q$ trasformazioni infinitesime

$$(24) \qquad X_{q+j} f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \ldots\ldots x_n^{(0)}) X_\lambda f \cdot$$

ed è altresì sottogruppo di stabilità di tutti e soli i punti della varietà sistatica V_ρ definita dalle $n-\rho$ equazioni

$$\varphi_{j\lambda}(x) = \varphi_{j\lambda}(x^{(0)}) \qquad (V. § 53)$$

Alle trasformazioni infinitesime (24) corrispondono in Γ_r le altre

$$Y_{q+j} f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \ldots\ldots x_n^{(0)}) Y_\lambda f \;;$$

per le ipotesi fatte sul sistema di equazioni (28) queste sono le trasformazioni infinitesime generatrici del sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità per i singoli punti della varietà sistatica W_ρ definita nel secondo spazio dalle equazioni

$$\psi_{j\lambda}(y_1 y_2 \cdots y_n) = \psi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$$

È manifesto che, ove esista la trasformazione

cercata che cangi $X_k f$ in $Y_k f$, dovrà cangiare la varietà sistatica V_ρ nella W_ρ, la qual cosa del resto risulta già dal §86 ove le relazioni (23) fra le x e le y si trovarono come necessarie. Ma ora abbiamo di più dimostrato questo fatto importante pel nostro scopo: nell'isomorfismo oloedrico fra G_r e Γ_r al sottogruppo G_{r-q} di stabilità relativo ai singoli punti di una varietà sistatica V_ρ corrisponde il sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità dei singoli punti della varietà sistatica W_ρ corrispondente, secondo le (23).

§. 105
Caso della transitività

Veniamo alla dimostrazione del teorema enunciato, cominciando dal caso in cui i due gruppi sono transitivi, che è il più semplice a trattarsi (*).

Dalle formole (23) è già stabilita, come si è detto, una corrispondenza fra le varietà sistatiche V_ρ, W_ρ dei due gruppi; si tratta ora di vedere

---

(*) La ragione sta in fondo in questo che per due gruppi simili transitivi la trasformazione più generale che cangia l'uno nell'altro contiene solo costanti arbitrarie ed invece funzioni arbitrarie nel caso della intransitività.

ulteriormente quale corrispondenza dovrà aver luogo fra i singoli punti di due varietà sistatiche V_ρ, W_ρ corrispondenti -

Fissiamo in due tali varietà sistatiche corrispondenti due punti qualunque uno P_0 nella prima, l'altro Q_0 nella seconda. Consideriamo poi nello spazio $(x_1 x_2 \dots x_n)$ un punto qualunque P dell'intorno di P_0; Siccome G_r è transitivo, esisteranno in G_r delle trasformazioni g che trasportano P_0 in P; sia g una fissa di esse sicchè si ha simbolicamente

$$(25) \qquad (P_0)g \equiv P$$

Essendo G_{r-q} il sottogruppo di stabilità relativo a P_0 e $\bar{g}$ una qualunque sua trasformazione, si vede subito che tutte le altre trasformazioni di G_r che portano P_0 in P sono date da

$$\bar{g}g.$$

percorrendo $\bar{g}$ le trasformazioni di G_{r-q} - Alle g in G_r corrispondono (§ 104) in Γ_r le trasformazioni $\bar{\gamma}$ del sottogruppo di stabilità Γ_{r-q} di Q_0 e se γ è la corrispondente di g, tutte e sole le

$$\bar{\gamma}\gamma,$$

percorrendo $\bar{\gamma}$ il sottogruppo Γ_{r-q}, porteranno Q_0 in un medesimo punto Q:

$$(Q_0)\bar{\gamma}\gamma \equiv Q$$

La corrispondenza fissata fra P_0 e Q_0 fa dunque altresì corrispondere ad ogni punto P (nell'intorno

di P_0) un determinato punto Q (nell'intorno di Q_0), e si noti che i due punti P, Q si trovano ancora nelle condizioni dei punti iniziali P_0, Q_0, poichè il sottogruppo di stabilità di P è $g^{-1}G_{r-q}\,g$, quello di Q è $\gamma^{-1}\Gamma_{r-q}\,\gamma$ e questi due sottogruppi sono ancora corrispondenti nell'isomorfismo oloedrico fra G_r, Γ_r.

Dunque la corrispondenza fissata fra un punto qualunque P del primo ed un punto Q del secondo spazio è tale che rimane la stessa applicando ai punti dei due spazi due trasformazioni corrispondenti qualunque g, γ di G_r, Γ_r. Questa corrispondenza è espressa analiticamente da una trasformazione T che fa passare dalle x alle y e soddisfa alle equazioni simboliche:

$$(P)T = Q\,;$$

la proprietà sopra osservata si traduce poi nell'altra

$$(26)\qquad (P)gT = (Q)\gamma$$

Ciò posto, proveremo che la detta T cangia le $X_k f$ nelle $Y_k f$ corrispondenti, come si voleva.

Per dimostrarlo ricordiamo che i due gruppi G_r, Γ_r hanno a comune il gruppo parametrico e presa una trasformazione finita qualunque $\sum e_i X_i f$ di G_r, che indichiamo con g_e, consideriamo la corrispondente $\sum e_i Y_i f$ di Γ_r che denotiamo con γ_e. Abbiamo:

(26*) $$(P)g_e T \equiv (Q)\gamma_e$$

ovvero

$$(P)g_e T\gamma_e^{-1} \equiv (Q) \equiv (P)T\,,$$

onde, poichè P è un punto qualunque

$$g_e T\gamma_e^{-1} = T$$

o in fine

(27) $$T^{-1} g_e T = \gamma_e$$

Dunque la T cangia la trasformazione finita $\sum_i e_i X_i f$ di G_r nella corrispondente $\sum_i e_i Y_i f$ di Γ_r e per ciò anche le trasformazioni infinitesime $X_i f$ nelle corrispondenti $Y_i f$, come volevasi.

È importante osservare che per tal modo si trovano ~~tutte~~ le trasformazioni T che cangiano G_r in Γ_r, cangiando ogni trasformazione g_e di G_r nella corrispondente γ_e di Γ_r. Una tale T deve infatti soddisfare l'equazione simbolica (27); onde segue, procedendo a ritroso, la (26*). Se dunque

$$(P_0)T \equiv Q_0\,,$$

sarà anche

$$(P)T \equiv Q$$

quando sia

$$P \equiv (P_0)g_e\,, \quad Q \equiv (Q_0)\gamma_e$$

Ciò significa che, se T trasporta P_0 in Q_0, deve trasportare ogni punto P precisamente nel punto Q, che sopra abbiamo fissato come corrispondente a P.

Quale è il grado d'infinità di queste trasfor-

mazioni T? Fissato P_0, cioè fissate le sue coordinate, possiamo prendere ad arbitrio Q_0 entro la varietà sistatica di I_r che corrisponde alla varietà sistatica di G_r contenente P_0. Essendo ρ la dimensione delle varietà sistatiche, la più generale trasformazione T conterrà r parametri (essenziali), le coordinate di Q_0 – Così non soltanto abbiamo dimostrato il nostro teorema (nel caso della transitività) ma abbiamo anche provato che: se due gruppi sistatici transitivi sono oloedricamente isomorfi ed esiste qualche trasformazione che cangia l'uno nell'altro, mantenendo la fissata corrispondenza d'isomorfismo, tutte le altre trasformazioni che raggiungono il medesimo effetto sono in numero di ∞^ρ, indicando ρ la dimensione della varietà sistatiche –

Per quanto si disse al § 83 rispetto alle possibili relazioni d'isomorfismo oloedrico fra due gruppi, si può concludere che se due gruppi transitivi sono simili, nella più generale trasformazione che cangia l'uno nell'altro entrano solo costanti arbitrarie –

Ciò del resto risulta ancora dalle osservazioni del § 89 relative alle trasformazioni permutabili con tutte quelle di un gruppo –

§ 106
Caso della intransitività

Passando ora al caso della intransitività cominciamo dall'osservare che tutto ciò che abbiamo detto al principio del paragrafo precedente quando, partendo da due rispettivi punti P_0, Q_0 presi ad arbitrio in due varietà sistatiche corrispondenti dei due gruppi G_r, Γ_r, si passava dalla coppia (P_0, Q_0) a tutte le coppie (P, Q) applicando a P_0, Q_0 trasformazioni corrispondenti dei due gruppi vale anche nel caso della intransitività – Soltanto quando i gruppi sono transitivi i punti P, Q percorrono completamente i rispettivi spazi e ne resta perfettamente fissata la trasformazione indicata con T al paragrafo precedente, che trasforma G_r in Γ_r portando P_0 in Q_0.

Se invece i due gruppi sono intransitivi, ed è quindi la caratteristica comune q delle due matrici

$$\left\| \xi_{ik}(x) \right\| \qquad \left\| \eta_{ik}(y) \right\|$$

minore del numero n delle variabili, ciascuno dei due gruppi possiede $n-q$ invarianti che indichiamo rispettivamente con

$$u_1(x) \quad u_2(x) \;\ldots\ldots\; u_{n-q}(x) \quad \text{per } G_r$$
$$v_1(y) \quad v_2(y) \;\ldots\ldots\; v_{n-q}(y) \quad \text{per } \Gamma_r\,;$$

essi sono le rispettive soluzioni indipendenti dei siste-

mi completi

$$(28) \quad X_1 f = 0 \, , \; X_2 f = 0 \, , \ldots \ldots \, X_q f = 0$$

$$(28^*) \quad Y_1 f = 0 , \; Y_2 f = 0 , \ldots \ldots \, Y_q f = 0$$

Ciascun punto $P_0 \equiv (x_i^{(0)})$ si muove per le trasformazioni di G_r entro la varietà V_q di equazioni

$$u_1(x) = u_1(x^{(0)}) \; , \; u_2(x) = u_2(x^{(0)}) \ldots \ldots u_{n-q}(x) = u_{n-q}(x^{(0)})$$

ma su questa transitivamente, analogamente $Q_0 \equiv (y_i^{(0)})$ transitivamente entro la varietà

$$v_1(y) = v_1(y^{(0)}) \; , \; v_2(y) = v_2(y^{(0)}) \ldots \ldots v_{n-q}(y) = v_{n-q}(y^{(0)})$$

Qui non basta più adunque partire da una sola coppia (P_0, Q_0) ma bisogna invece fissare ∞^{n-q} tali coppie $(P_0 Q_0)$ ogni volta in modo che P_0, Q_0 appartengano a varietà sistatiche corrispondenti dei due gruppi, e scelte per tal guisa che le varietà V_q d'intransitività

$$u_1(x) = u_1(x^{(0)}) \, , \ldots \ldots \, u_{n-q}(x) = u_{n-q}(x^{(0)})$$

riempiano interamente il primo spazio ed analogamente le

$$v_1(y) = v_1(y^{(0)}) \ldots \ldots v_{n-q}(y) = v_{n-q}(y^{(0)})$$

il secondo.

Se riusciamo a far questo avremo stabilito una trasformazione T che porta da un punto qualunque P del primo spazio ad un punto Q corrispondente nel secondo e tale che applicando ai punti $(P\,Q)$ di una coppia rispettivamente due trasformazioni corrispondenti qualunque g, γ di G_r, Γ_r i punti $(P)_g$

$(\mathfrak{L})_r$ saranno ancora corrispondenti. Allora vale la dimostrazione stessa del paragrafo precedente per provare che la T trasforma ciascuna X_{if} nella Y_{if} corrispondente, anzi di più ogni trasformazione finita di G_r nella corrispondente di Γ_r.

Resta ora quì soltanto a far vedere che si possono in effetto soddisfare le condizioni sopra enunciate. Per questo cominciamo dal ricordare che, nelle ipotesi ammesse al § 104 fra le $q(r-q)$ funzioni $\varphi_{ij}(x)$ ve ne sono soltanto $n-p$ indipendenti; queste indichiamo con

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \varphi_{n-p}$$

e le corrispondenti ψ_{ij} con

$$\psi_1 \quad \psi_2 \cdots\cdots \psi_{n-p};$$

e si noti che per le citate ipotesi sulla compatibilità delle equazioni

$$\varphi_{ij}(x) = \psi_{ij}(y),$$

se una certa φ_{ij} è una funzione $F(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-p})$ di $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-p}$, la ψ_{ij} corrispondente dovrà essere la medesima funzione $F(\psi_1 \cdots \psi_{n-p})$ di $\psi_1 \cdots \psi_{n-p}$ (altrimenti le equazioni scritte sopra sarebbero incompatibili).

Importa anzitutto riconoscere quanti fra gli invarianti

$$u_1 \quad u_2 \cdots\cdots u_{n-q}$$

di G_r sono funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{n-p}$. Se $U(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-p})$ è

un tale invariante, dovrà essere soddisfatto il sistema (28) cioè

$$(29) \qquad \sum_{\nu}^{1,\dots,n-p} X_k(\varphi_\nu)\frac{\partial U}{\partial \varphi_\nu}=0 \qquad , k=1,2\dots q$$

Per quanto si è visto al § 54 le $X_k(\varphi_\nu)$ sono funzioni quadratiche delle $\varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_{n-p}$ dipendenti unicamente dalle costanti di composizione (e dalle relazioni fra le φ 2) - Può anche darsi che queste $X_k(\varphi_\nu)$ siano tutte identicamente nulle, che cioè tutte le $\varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_{n-p}$ siano invarianti di G_r - In generale le (29) ammetteranno un certo numero $n-s \leqq n-p$ di soluzioni indipendenti

$$U_1(\varphi)\ ,\ U_2(\varphi) \dots\dots U_{n-s}(\varphi)$$

e questo numero potrà avere un valore fra 0 e $n-p$, gli estremi inclusi, il caso $s=p$ corrispondendo a quello eventuale sopra notato in cui $\varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_{n-p}$ siano tutti invarianti.

Poniamo

$$U_1(\varphi)=u_1(x_1 \dots x_n) , \dots\dots U_{n-s}(\varphi)=u_{n-s}(x_1\dots x_n)$$

e siano

$$u_{n-s+1}, \dots u_{n-q}$$

gli altri invarianti, cioè le altre soluzioni del sistema (28) indipendenti fra loro e dai precedenti.

La possibilità di soddisfare alle condizioni enunciate dipende da questo fatto che le $(n-p)+(s-q)$ funzioni

$$(30) \qquad \varphi_1 , \varphi_2 \dots \varphi_{n-p} \quad u_{n-s+1} \dots u_{n-q}$$

sono fra loro indipendenti e quindi in ogni caso

$$n-p+s-q \leqq n$$

Per dimostrarlo si supponga al contrario ($\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_{n-p}$ essendo già fra loro indipendenti) che siano soltanto

(31) $\qquad \varphi_1 . \varphi_2 \cdots \varphi_{n-p} \quad u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q}$

fra loro indipendenti mentre le precedenti

$$u_{n-s+1} \cdots u_{n-s+h}$$

siano funzioni delle (31) p. e.

(32) $\qquad u_{n-s+1} = \theta(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_{n-p}\, , u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$

Poichè tutte le u sono soluzioni del sistema (28), ne verrebbe

(α) $\qquad \sum_{\nu}^{1 \ldots n-p} X_k(\varphi_\nu) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_\nu} = 0 \qquad k = 1 . 2 \cdots q$

e le funzioni delle (31) che risultano nei primi membri di queste equazioni dovrebbero essere identicamente nulle poichè le (31) sono indipendenti – Ciò equivale a dire che se nella $\theta(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-p}\, u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$ si riguardano $u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q}$ come indeterminate qualunque (parametri) la θ soddisfa sempre le (α) cioè il sistema (29); e poichè le soluzioni indipendenti di questo sono

$$u_1\, ,\, u_2 \cdots u_{n-s}$$

la θ risulterebbe una funzione F di queste e dei parametri $u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q}$ – Perciò la (32) si muterebbe in

$$u_{n-s+1} = F(u_1\, u_2 \cdots u_{n-s}\, ; u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$$

ciò che contraddice al fatto che tutte le

$$u_1 \ldots\ldots u_{n-q}$$

sono fra loro indipendenti -

Osserviamo ora che le funzioni

$$U_1(\psi_1 \ldots \psi_{n-\rho}) \ldots\ldots U_{n-s}(\psi_1 \ldots \psi_{n-\rho})$$

sono altrettante soluzioni del sistema

$$(29^*) \qquad \sum_{\nu}^{1\ldots n-\rho} Y_k(\psi_\nu) \frac{\partial U}{\partial \psi_\nu} = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots q$$

poiché (§ 54) le $Y_k(\psi_\nu)$ si esprimono per le ψ precisamente come le $X_k(\psi_\nu)$ per le φ; questi sono tutti e soli gli invarianti di Γ_2 funzioni delle ψ e noi li indichiamo con

$$v_1 \quad v_2 \ldots\ldots v_{n-s}$$

e con

$$v_{n-s+1} \ldots\ldots v_{n-q}$$

indichiamo i rimanenti. Come le $(n-\rho)+(s-q)$ funzioni (30), così le

$$(30^*) \quad \psi_1 \quad \psi_2 \ldots \psi_{n-\rho} \quad v_{n-s+1} \ldots v_{n-q}$$

saranno fra loro indipendenti -

Ciò posto, avviamoci ora rapidamente al nostro scopo fissando in ciascuna varietà d'intransitività

$$u_1 = c_1, \; u_2 = c_2 \ldots u_{n-s} = c_{n-s}, \; u_{n-s+1} = c_{n-s+1} \ldots\ldots u_{n-q} = c_{n-q}$$

ad arbitrio un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$, indi prendendo le coordinate del punto corrispondente $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)})$ in guisa da soddisfare le condizioni:

$$(33)\begin{cases} \psi_1(y^0) = \varphi_1(x^0) \ldots\ldots \psi_{n-\rho}(y^0) = \varphi_{n-\rho}(x^0)\,; \\ v_{n-s+1}(y^0) = u_{n-s+1}(x^0) \ldots\ldots v_{n-q}(y^0) = u_{n-q}(x^0) \end{cases}$$

Ciò è possibile perchè le (30*) come le (30) sono indipendenti ed anzi sarà ancora possibile in infiniti modi se $(n-\rho)+(s-q)<n$, ma in ogni caso potendosi sostituire a

$$v_{n-s+1} \ldots\ldots v_{n-q}$$

$s-q$ loro funzioni arbitrarie indipendenti, nelle coordinate $y_i^{(0)}$ di Q_0 potremo sempre fare entrare delle funzioni arbitrarie -

Scelto uno dei sistemi $y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)}$ che soddisfano le (33) per le coordinate, i due punti P_0, Q_0 apparterranno a due varietà sistatiche corrispondenti, perchè avremo

$$\varphi_{j\lambda}(x^0) = \psi_{j\lambda}(y^0)$$

Inoltre avremo

$$v_1(y^0) = U_1(\psi_1(y^0) \ldots \psi_{n-\rho}(y^0)) = U_1(\varphi_1(x^0) \ldots \varphi_{n-\rho}(x^0)) = u_1(x^0) = c_1$$

e analogamente

$$v_2(y^0) = c_2 \quad \ldots\ldots \quad v_{n-s}(y^0) = c_{n-s}$$

le quali, insieme alle seconde (33), dimostrano che la varietà d'intransitività contenente Q_0 riempirà, al variare di Q_0, tutto lo spazio - Così resta completata la dimostrazione -

§ 107
Nuovo enunciato per le condizioni di simiglianza

Le ricerche così completate sulle condizioni di simiglianza dei gruppi ci consentono di dare alle condizioni stesse un'altra forma molto notevole.

Se due gruppi G_r, Γ_r sono simili, essi sono anche in tale relazione d'isomorfismo oloedrico fra loro che al sottogruppo di stabilità di un punto generico P in G_r corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità del punto Q che corrisponde a P nella trasformazione che cangia G_r in Γ_r.

Viceversa dimostriamo il teorema:

A) Due gruppi G_r, Γ_r sopra un egual numero di variabili sono simili quando è possibile porli in tale relazione d'isomorfismo oloedrico che al sottogruppo di stabilità di un punto generico P in G_r corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità di un punto Q e viceversa ad un tale sottogruppo di Γ_r uno analogo in G_r.

Colle solite notazioni il sottogruppo G_q di stabilità di un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ è generato dalle $r-q$ trasformazioni infinitesime

$$(34) \qquad X_{q+j} f - \sum_{\lambda}^{1 \dots q} \varphi_{j\lambda} (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}) X_\lambda f \qquad (j = 1, 2 \dots$$

il corrispondente Γ_{r-q} in Γ_r è quindi generato dalle

$$\text{(35)} \quad Y_{q+j}f - \sum_{1}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}) Y_\lambda f \quad (j = 1, 2 \dots r-q),$$

le quali sono altresì le generatrici del sottogruppo di stabilità di un certo punto $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \dots y_n^{(0)})$ - Ma nella (34) basterà associare

$$X_1f,\ X_2f, \dots X_qf,$$

che sono le q non legate da relazioni fra le X_kf per avere un sistema di r trasformazioni generatrici di G_r. A causa dunque dell'isomorfismo oloedrico le q trasformazioni corrispondenti alle $X_1f, \dots X_qf$

$$Y_1f,\ Y_2f \dots Y_qf$$

associate alle $r-q$ (35) danno un sistema di generatrici di Γ_r - Ne segue che

$$Y_1f,\ Y_2f - \dots Y_qf$$

non sono legate da relazioni, mentre le (35) e quindi $Y_{q+1}f, \dots Y_rf$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per $Y_1f \dots Y_qf$; supponiamo che ciò sia colle formole

$$Y_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \psi_{j\lambda}(y_1 \dots y_n) Y_\lambda f$$

Ma allora le generatrici del sottogruppo Γ_{r-s} di stabilità di $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \dots y_n^{(0)})$ sono

$$Y_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \psi_{j\lambda}(y_1^{(0)} \dots y_n^{(0)}) Y_\lambda f,$$

onde queste debbono essere combinazioni lineari a coefficienti costanti delle (35), e ciò porta che i valori $\psi_{j\lambda}(y^{(0)})$ debbono coincidere cogli altri $\varphi_{j\lambda}(x^{(0)})$ - Se ne

conclude che le $q(r-q)$ equazioni

$$\varphi_{j2}(x_1\, x_2 \cdots x_n) = \psi_{j2}(y_1\, y_2 \cdots y_n)$$

sono compatibili e non danno luogo nè a relazioni fra le sole x nè a relazioni fra le sole y poichè le $x_i^{(o)}$ possono scegliersi ad arbitrio e così le $y_i^{(o)}$ secondo l'enunciato A) - Sono dunque soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti per la simiglianza dei due gruppi, c.d.d. -

Nel caso poi che i due gruppi G_r, Γ_r siano transitivi, le condizioni enunciate nel teorema A) possono molto semplificarsi - E infatti basta allora che l'isomorfismo oloedrico fra G_r e Γ_r sia tale che al sottogruppo di stabilità G_{r-q} di un determinato punto P_0 (ove la caratteristica della matrice delle ξ_{ik} abbia per altro il suo valore generico q) corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità di un punto Q_0 - Colle considerazioni del § 105 infatti facendo corrispondere al punto $P \equiv (P_0)g$ il punto $Q \equiv (Q_0)\gamma$, dove g, γ sono due qualunque trasformazioni corrispondenti in G_r, Γ_r ci troveremo nelle condizioni del teorema A) -

Sussiste dunque l'ulteriore teorema:

B) Due gruppi transitivi G_r, Γ_r sopra un egual numero di variabili $(x_1\, x_2 \cdots x_n)$, $(y_1\, y_2 \cdots y_n)$ sono simili quando possono porsi in tale corrispondenza d'isomorfismo oloedrico che al sottogruppo di stabilità G_{r-q} in G_r di

un determinato punto P_0 (dove la caratteristica della matrice $|\xi_{ik}|$ ha il suo valore generico q) corrisponda in Γ_r il sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità di un punto Q_0.

§.108
Trasformazioni permutabili con un gruppo.

Dopo avere così risoluto completamente il problema di riconoscere se due gruppi sono simili, ritorniamo al problema del §88 di trovare tutte le trasformazioni permutabili con un gruppo. Questo non è che un caso particolare della teoria generale della somiglianza, trattandosi di riconoscere la somiglianza di un gruppo con se medesimo. Bisogna in primo luogo trovare tutte le relazioni d'isomorfismo oloedrico di un gruppo G_r con se stesso, ciò che è un problema algebrico (ivi §88) e supposto che un tale isomorfismo sia dato dalla corrispondenza delle r trasformazioni

$$X_1 f, X_2 f, \ldots X_r f$$

generatrici di G_r alle altre r

$$X'_1 f, X'_2 f, \ldots X'_r f$$

riconoscere se esiste qualche trasformazione T che cangi le $X_k f$ nelle $X'_k f$, ciò che si fa applicando i criterii generali di somiglianza che abbiamo dimostrato.

Il problema poi di trovare tutte le possibili trasformazioni T si riconduce, come si è visto, a quello più semplice di trovare tutte le trasformazioni $\mathfrak{T}$ permutabili colle singole trasformazioni del gruppo.

Perchè esista una continuità di tali trasformazioni $\mathfrak{T}$, e quindi anche trasformazioni infinitesime permutabili con tutte quelle del gruppo, è necessario (§ 89) che il gruppo sia sistatico. Ma ora vediamo subito che tale condizione necessaria è anche sufficiente. Ritornando infatti alle condizioni enunciate in B) § 87 come necessarie per l'esistenza di trasformazioni $\mathfrak{T}$ che cangino $X_1, X_2, \ldots X_r$ in $Y_1, Y_2 \ldots Y_r$ e riconosciute poi anche sufficienti, applichiamole al caso in cui le X coincidano colle Y, mutate le variabili x nelle y, e siano le trasformazioni generatrici di un gruppo sistatico. Allora le ψ_{jk} coincidono colle φ_{jk} (cangiate le x nelle y) e sono in numero di $n-\rho < n$ indipendenti. Le condizioni per la compatibilità delle equazioni

$$\varphi_{jk}(x) = \psi_{jk}(y)$$

sono certo soddisfatte, anzi non determinano che $n-\rho$ delle y in funzione delle x. I risultati dei §§. 105, 106 ci assicurano che esiste una continuità di trasformazioni $\mathfrak{T}$ permutabili colle singole del gruppo ed anzi ci insegnano che il gruppo delle $\mathfrak{T}$ è finito quan-

do G_r è transitivo, infinito quando è intransitivo. Precisamente se G_r è transitivo e le sue varietà sistatiche hanno la dimensione ρ il gruppo Γ delle $\mathcal{Z}$ contiene precisamente r parametri e cangia ciascuna varietà sistatica transitivamente in se medesima. Dunque:

Se un gruppo G_r è sistatico transitivo e le sue varietà sistatiche hanno la dimensione ρ, le trasformazioni permutabili con tutte quelle di G_r formano un gruppo Γ_ρ con ρ parametri e le varietà sistatiche di G_r sono varietà d'intransitività per Γ_ρ.

Nel caso particolare della semplice transitività è $\rho = r$ ed il gruppo Γ diventa il gruppo reciproco di G_r (cf. § 90)

In generale, se ritorniamo alle equazioni (10) § 89

$$(36) \qquad \sum_{\lambda}^{1\dots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu}^{1\dots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

cui debbono soddisfare i coefficienti ζ di ogni trasformazione infinitesima:

$$Zf = \sum_{\nu}^{1\dots n} \zeta_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

permutabile con tutte quelle del gruppo vediamo, conformemente a quanto abbiamo ivi enunciato, che il sistema (36) ammette o non ammette soluzioni ζ secondo che il gruppo è sistatico od asistatico –

Se il gruppo è sistatico e transitivo, le (36) ammettono un integrale generale con ρ costanti ar-

bitrarie(*); ed invece con funzioni arbitrarie nel caso della intransitività del gruppo sistatico.

§ 109
Teoremi sui gruppi asistatici e sistatici

Terminiamo il presente capitolo col dimostrare alcune particolari proprietà dei gruppi asistatici e sistatici che discendono dai risultati generali sopra esposti.

Supponiamo dapprima di avere un gruppo G_r asistatico e domandiamo di trovare tutte le trasformazioni permutabili con G_r, fra le quali figurano naturalmente tutte quelle di G_r stesso; in altre parole

---

(*) Se si ricorda che dalle (36) ((10) § 89) si sono dedotte le relazioni lineari (11) § 89 nelle ξ

$$\sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \xi_\nu = 0$$

che sono in numero di $n-p$ indipendenti, si vede che queste lasciano arbitrari i valori iniziali di p delle ξ; ma questi restano pei risultati del testo effettivamente arbitrari. Ciò equivale a dire che le equazioni superiori insieme alle (36) formano un sistema completo di Mayer.

domandiamo di trovare il più ampio gruppo in cui G_r è contenuto come sottogruppo invariante. È facile vedere in primo luogo che questo gruppo più ampio è sempre finito — Per trovare tutte le indicate trasformazioni conviene riferire il gruppo G_r in tutti i modi possibili a se medesimo per isomorfismo oloedrico, ciò che dà luogo soltanto ad un' infinità di modi possibili dipendente da un numero finito di costanti arbitrarie (§ 88) — Ma il gruppo G_r essendo asistatico, ogni tale riferimento d'isomorfismo oloedrico del gruppo con se stesso è una simiglianza (§ 87) e la trasformazione corrispondente T è unica, ovvero si ha una serie discreta di tali trasformazioni, che si calcolano con puri processi algebrici, appena note le trasformazioni infinitesime di G_r — Dunque:

Il più ampio gruppo Γ in cui è contenuto un gruppo asistatico come sottogruppo invariante contiene sempre un numero finito di parametri; le sue equazioni finite si trovano senza integrazione appena note le trasformazioni infinitesime di G_r.

È facile intendere dopo ciò che anche le equazioni finite di G_r stesso si potranno avere senza integrazioni appena note le trasformazioni infinitesime. Per dimostrarlo direttamente si ricordi che date le trasformazioni infinitesime di G_r si possono calcolare le trasformazioni finite del gruppo aggiunto (§ 69)

$$e'_i = \sum_{k}^{1\ldots r} \rho_{ik}(\alpha_1 \ldots \alpha_r)\, e_k \qquad (i=1,2\ldots r)$$

risolvendo soltanto un'equazione algebrica.

3) Dopo ciò della corrispondente trasformazione finita

$$x'_i = f_i(x, \alpha)$$

sotto forma canonica di G_r si sa come trasforma le r trasformazioni infinitesime, ciò che per l'asistaticità del gruppo basta per calcolare la trasformazione stessa. Così:

Date le trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$ generatrici di un gruppo G_r asistatico, le sue equazioni finite si ottengono senza alcuna integrazione.

Consideriamo ora un gruppo G_r sistatico ed il sottogruppo di stabilità G_{r-q} di un punto generico P. Per il punto P passa una varietà sistatica V_ρ i cui punti hanno tutti lo stesso sottogruppo G_{r-q} di stabilità. Può darsi ora che esistano in G_r fuori di G_{r-q} trasformazioni che lascino fissa V_ρ senza lasciarne fissi tutti i punti. Ciò avviene in particolare necessariamente se G_r è transitivo per tutte le trasformazioni che trasportano P negli altri punti di V_ρ ed anche se G_r è intransitivo quando la V_ρ e la minima varietà invariante relativa a P abbiano a comune una varietà continua. In ogni caso le trasformazioni di G_r che lasciano fissa V_ρ formano un sottogruppo G_{r-h} $(h \leqq q)$ contenente (come subito si vede)

G_{r-q} quale sottogruppo invariante -

Inversamente supponiamo che per un gruppo G_r il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P sia contenuto come sottogruppo invariante in un sottogruppo più ampio G_{r-h} $(h<q)$; dico allora che G_r è necessariamente sistatico - Difatti, siccome le sole trasformazioni di G_{r-q} lasciano fisso P, quelle di G_{r-h} faranno descrivere a P una varietà V_{h-q} a $h-q$ dimensioni di cui tutti i punti nascono da P per una trasformazione g di G_{r-h} ed hanno quindi per sottogruppo di stabilità $g^{-1}G_{r-q}\,g = G_{r-q}$; essi appartengono perciò ad una varietà sistatica contenente P. Dunque: Se un gruppo G_r dello spazio S_n è così formato che il sottogruppo di stabilità, relativo ad un punto generico, sia contenuto come sottogruppo invariante in un sottogruppo più ampio, o in G_r stesso, il gruppo è sistatico -

Non è vero in generale inversamente che il gruppo sia asistatico se un sottogruppo generico di stabilità non è contenuto come invariante in un sottogruppo più ampio; la conclusione però è legittima, per quanto precede, nel caso della transitività. Dunque

Un gruppo transitivo è asistatico allora ed allora soltanto quando il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico non è contenuto come invariante in alcun sottogruppo più ampio -

Capitolo IX°

Gruppi ampliati e prolungati – Invarianti differenziali –

§. 110
Transitività multiple

Dato un gruppo G_r le cui equazioni finite siano

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n ; a_1 \ldots a_r).$$

se ne possono dedurre in varii modi nuovi gruppi collo stesso numero di parametri, ma operanti sopra un maggior numero di variabili. Un primo e più semplice modo, che conduce all'importante nozione di transitività multipla, è il seguente.

In luogo di applicare le trasformazioni (1) di G_r ad una sola serie di variabili, applichiamole a k tali serie

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}\, x_2^{(2)} \ldots\ldots x_n^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots\ldots x_n^{(k)}. \end{array}$$

e le formole corrispondenti

$$(2) \qquad y_i^{(s)} = f_i(x_1^{(s)} x_2^{(s)} \ldots x_n^{(s)} ; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots n \; ; \; s = 1, 2 \ldots k$$

definiranno evidentemente un nuovo gruppo a r parametri sulle kn variabili $x_i^{(s)}$ - Geometricamente ciò equivale a dire che in luogo di considerare G_r come agente sui singoli punti dello spazio, si considera come agente sopra le coppie di punti $(k=2)$ o sulle terne $(k=3)$.... in generale sopra i gruppi arbitrari di k punti.

Indichiamo il gruppo (2) con $G_r^{(k)}$ e lo diciamo il gruppo k volte ampliato da G_r - Si vede immediatamente che se le r trasformazioni generatrici di G_r sono

$$X_i f = \sum_{\lambda}^{1 \dots n} \xi_{i\lambda}(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} ,$$

ponendo

$$X_i^{(s)} f = \sum \xi_{i\lambda}(x_1^{(s)} \dots x_n^{(s)})\frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(s)}} ;$$

quelle di $G_r^{(k)}$ saranno

$$X_i^{(1)} F + X_i^{(2)} F + \dots X_i^{(k)} F$$

Se il gruppo ampliato $G_r^{(k)}$ è transitivo ciò significa manifestamente che un gruppo di k punti arbitrari $P_1 P_2 \dots P_k$ in S_n può essere trasportato, con una trasformazione di G_r, in un altro gruppo di k punti pure arbitrari $Q_1 Q_2 \dots Q_k$ - Quando avvenga che il gruppo $G_r^{(k)}$ sia transitivo ma il seguente $G_r^{(k+1)}$ intransitivo, si potranno portare (con trasformazioni di G_r) k punti arbitrari in altri k arbitrari ma non $k+1$ in altri $k+1$ - Seguendo una denominazione della teoria dei gruppi di sostituzioni si dirà allora che il

gruppo G_r è k volte transitivo (*). Si noti che appena kn superi il numero r dei parametri il gruppo $G_r^{(k)}$ è certamente intransitivo, e per ciò in ogni caso il grado di transitività non può superare $\frac{r}{n}$ -

Per calcolare l'effettivo grado di transitività potremo procedere nel modo seguente - Costruiamo, come nella nota al § 23, le successive matrici

$$M_1 \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)})\, \xi_{i2}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{in}(x^{(1)}) \right\| \quad i=1,2\dots r$$

$$M_2 \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{in}(x^{(1)})\, \xi_{i1}(x^{(2)}) \dots\dots \xi_{in}(x^{(2)}) \right\| \quad i=1,2\dots r$$

. . . .

$$M_s \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{in}(x^{(1)}) \dots\dots\dots \xi_{i1}(x^{(s)}) \dots\dots \xi_{in}(x^{(s)}) \right\| \quad i=1,2\dots r$$

. . . .

e siano

(*) $\qquad \nu_1\,,\ \nu_2 \dots\dots \nu_s \dots\dots$

le loro successive caratteristiche. Questa serie di numeri ν è sempre crescente fino al massimo r, indi stazionaria, come si è visto al citato § 23. Qui lo riconosciamo anche osservando che quando $\nu_s < r$, ciò vuol dire che, presi s

---

(*) Si osservi che questa definizione della transitività multipla non è in perfetto accordo con quella della semplice transitività, che si dice aver luogo solo quando $r=n$. Se $r>n$ e non vi è transitività multipla converrà perciò dire soltanto che il gruppo è una volta transitivo.

presi ad arbitrio, vi è un sottogruppo $G_{r-\nu_s}$ di G_r ad $r-\nu_s$ parametri che lascia fissi tutti quegli s punti. Ora è evidentemente impossibile che tutte le trasformazioni di $G_{r-\nu_s}$ lascino fisso anche un $(s+1)^{mo}$ punto preso ad arbitrio, onde sarà necessariamente $\nu_{s+1} > \nu_s$ c. d. d.

I successivi gruppi ampliati

$$G_r^{(1)}\ G_r^{(2)} \ldots\ldots G_r^{(s)} \ldots\ldots$$

rimangono transitivi finchè i corrispondenti numeri ν_s soddisfano la condizione $\nu_s \geq s n$. Se ν_k è l'ultimo numero della serie (4) per il quale questo accade il gruppo G_r è precisamente k volte transitivo.

§. 111
Invarianti di gruppi di punti

Se il gruppo ampliato $G_r^{(q)}$ è intransitivo esso possiede un certo numero di invarianti, precisamente, nelle notazioni superiori, ne possiede $qn-\nu_q$ che sono le soluzioni del sistema completo

$$X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \ldots\ldots + X_i^{(q)}F = 0\ ;$$

questi diconsi gli invarianti del sistema dei q punti.

Secondo il significato generale degli invarianti dei gruppi intransitivi (§ 49), la condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi di q punti siano tra-

ducibili l'uno nell'altro con trasformazioni di G_r è che abbiano uguali invarianti.

Con questa nozione di invariante di un sistema di punti possiamo definire la transitività multipla anche così: Un gruppo G_r è m volte transitivo se i sistemi di m o di un numero minore di punti non hanno ancora invarianti ma ne hanno quelli di m+1 punti.

Importa distinguere fra gli invarianti di un gruppo di q punti quelli che sono veramente relativi a tutti i q punti da quelli che appartengono già a q-1, q-2 ..... di questi punti o sono funzioni di essi. Diremo i primi invarianti propri del sistema dei q punti, gli altri invarianti impropri. Dimostriamo che da un certo valore di q in poi non esistono più invarianti propri, precisamente diciamo che: se nella serie (*) dei numeri ν, il primo che eguaglia il numero r dei parametri è ν_s, al di là di $q=s+1$ non esistono certamente più invarianti propri.

Siccome poi è certamente $\nu_r = r$, ne segue che un sistema di r+2 o di un numero maggiore di punti non ha invarianti propri.

Per dimostrare il teorema enunciato osserviamo che l'essere $\nu_s = r$ significa che un sistema arbitrario di s punti non è lasciato fisso da alcuna trasformazione di G_r salvo l'identità e quindi due gruppi di s

punti equivalenti $(P_1 P_2 \dots P_s)$, $(Q_1 Q_2 \dots Q_s)$ si traducono l'uno nell'altro con una sola trasformazione di G_r.

Presi allora due sistemi di $s+2$ punti

$$(5) \quad \begin{cases} (P_1 P_2 \dots\dots P_s P_{s+1} P_{s+2}) \\ (Q_1 Q_2 \dots\dots Q_s Q_{s+1} Q_{s+2}) \end{cases}$$

per scrivere che sono equivalenti basterà scrivere che lo sono p. e. i due sistemi di $s+1$ punti

$$(6) \qquad (P_1 P_2 \dots P_s P_{s+1}) \;,\; (Q_1 Q_2 \dots Q_s Q_{s+1})$$

e gli altri due

$$(6^*) \qquad (P_1 P_2 \dots P_s P_{s+2}) \;,\; (Q_1 Q_2 \dots Q_s Q_{s+2})$$

ciò che si fa eguagliando i loro rispettivi invarianti (proprii od improprii). Difatti, siccome vi è un'unica trasformazione che porta $P_1 P_2 \dots P_s$ in $Q_1 Q_2 \dots Q_s$, la stessa trasformazione porterà il primo sistema (6) o (6*) nel secondo e quindi anche il primo sistema (5) nel secondo. L'equivalenza dei due sistema (5) si esprime dunque per mezzo di invarianti, relativi a gruppi di meno di $s+2$ punti, onde segue appunto che un gruppo di $s+2$ punti o di un numero maggiore di punti, non ha invarianti proprii.

Come caso particolare del teorema dimostrato notiamo il seguente: Se il gruppo G_r sulle n variabili è semplicemente transitivo, soltanto le coppie di punti hanno invarianti (proprii) rispetto al gruppo.

Infatti si ha allora $s_1 = r$, cioè $s = 1$

Per citare due esempi semplici, consideriamo dapprima il gruppo di movimenti nel piano (x, y) colle trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

Questo è un G_3 transitivo una sola volta, il primo gruppo ampliato $G_3^{(1)}$ è intransitivo onde una coppia di punti ha un invariante che è manifestamente la distanza dei due punti, o qualunque sua funzione p. e. $(x-x')^2+(y-y')^2$ - Questa è effettivamente la soluzione del sistema completo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

Si osservi che in questo caso si ha

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3$$

e il teorema dimostrato sopra ci direbbe soltanto che già le quaderne di punti non hanno più invarianti proprî; in realtà nemmeno le terne di punti hanno invarianti proprii, come è chiaro geometricamente.

Prendiamo ancora il gruppo projettivo sopra una variabile x_1, che è un G_3 colle tre trasformazioni infinitesime (§75)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1^2\frac{\partial f}{\partial x_1};$$

qui abbiamo

$$\nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 2 \quad \nu_3 = 3$$

ed il primo gruppo ampliato intransitivo è $G_3^{(4)}$. Il gruppo projettivo G_3 è dunque triplamente transitivo.

ma (essendo $r_3 = 3$) la trasformazione che porta tre punti in tre altri sarà perfettamente determinata, come del resto è ben noto. Solo le quaderne di punti (essendo $s = 3$) avranno invarianti proprii; precisamente una quaderna $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_4)$ ha un unico invariante che si può prendere uguale al rapporto anarmonico

$$J = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_1 - x_4}$$

Questa è l'unica soluzione del sistema completo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \end{cases}$$

§ . 112

Gruppi prolungati agli elementi lineari

Andiamo ora a trattare di un altro modo di ampliamento dei gruppi che ci condurrà all'importante nozione degli invarianti differenziali di un gruppo. Ma prima consideriamo un caso particolare più semplice di siffatto ampliamento o prolungamento di un gruppo, il caso del prolungamento degli elementi lineari.

Ogni trasformazione

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n) \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

di un gruppo trasforma insieme ai punti dello spazio anche tutti gli elementi geometrici in esso contenuti in altri enti della medesima specie, p. e. tutte le curve in curve, le superficie in superficie etc..

Se consideriamo in particolare una curva C ed un suo punto P, essa sarà cangiata dalla trasformazione in una curva Γ ed un suo punto Q. La curva C ha in $P=(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ una tangente (§ 43) che è individuata dal punto P e dalla sua direzione; questa viene fissata dalle n costanti di direzione che indichiamo con $x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$; esse non sono altro che le derivate di $x_1\, x_2 \ldots x_n$ rispetto al parametro t che individua i punti della curva C:

$$x_1^{(1)} = \frac{dx_1}{dt}\,, \quad x_2^{(1)} = \frac{dx_2}{dt}\,, \ldots\ x_n^{(1)} = \frac{dx_n}{dt}$$

Cangiando il parametro t, non variano che per un fattore comune di proporzionalità); possono quindi considerarsi come coordinate omogenee della direzione (cf. § 43). L'insieme del punto P e di un tratto infinitesimo della curva C o della sua tangente uscente da P diciamo elemento lineare della curva C in P; un elemento lineare ha le $2n$ coordinate

$$x_1\, x_2 \ldots x_n\, ;\ x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$$

Ogni elemento lineare di una curva C viene cangiato dalla trasformazione in un elemento lineare

corrispondente della curva Γ corrispondente. Consideriamo ora la trasformazione (7) come agente sugli ∞^{2n-1} elementi lineari dello spazio. Analiticamente dedurremo subito le formole per la trasformazione (7*) prolungata agli elementi lineari, aggiungendo alle (7) le formole che ne risultano per una derivazione rapporto a t, cioè:

$$(7^*) \qquad y_i^{(1)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} x_1^{(1)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} x_2^{(1)} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} x_n^{(1)}$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

dove le derivate parziali sono calcolate nel punto $P \equiv (x_1 \dots x_n)$ da cui esce l'elemento lineare.

Si osservi che: Per una trasformazione (7) qualunque le coordinate omogenee $x_i^{(1)}$ della direzione dell'elemento lineare subiscono la sostituzione lineare omogenea (7*) a determinante $\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \neq 0$; in altre parole fra gli elementi lineari uscenti da due punti corrispondenti la trasformazione qualunque (7) stabilisce una corrispondenza projettiva.

Se invece di considerare una sola trasformazione (7), ne consideriamo una serie ∞^r formanti un gruppo G_r

$$(8) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a_1, a_2 \dots a_r),$$

è geometricamente intuitivo che formeranno ancora un gruppo le trasformazioni prolungate agli elementi lineari e cioè un gruppo a r parametri, sul

le 2n variabili

$$x_1\, x_2 \ldots x_n\,;\; x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)},$$

gruppo che diremo il gruppo $G_r^{(1)}$ prolungato di G_r.

Del resto si constata subito analiticamente la cosa osservando che la trasformazione (8) prolungata agli elementi lineari è data dall'associare alle (8) le formole

$$(8^*) \qquad y_i^{(1)} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\lambda}\, x_\lambda^{(1)}$$

Ora le (8) formando un gruppo G_r, le f_i soddisfano per ipotesi alle relazioni funzionali seguenti — Posto

$$z_i = f_i(y_1\, y_2 \cdots y_n\,; b_1 \ldots b_r)$$

si ha anche

$$z_i = f_i(x, c) \quad , \quad c = \varphi(a, b)$$

La derivazione rapporto a t di queste ci dà da una parte

$$z_i^{(1)} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial f_i(y, b)}{\partial y_\lambda}\, y_\lambda^{(1)}$$

e dall'altra

$$z_i^{(1)} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial f_i(x, c)}{\partial x_\lambda}\, x_\lambda^{(1)},$$

onde risulta che la composizione di due trasformazioni (8*) coi rispettivi parametri a, b dà luogo ad una trasformazione (8*) coi parametri c.

Segue da queste considerazioni che il gruppo prolungato $G_r^{(1)}$ ha lo stesso gruppo parametrico del primitivo G_r, col quale è olodricamente isomorfo

§ 113
Trasformazioni infinitesime del gruppo prolungato $G_2^{(1)}$

Consideriamo una trasformazione infinitesima qualunque

$$Xf = \sum_i \xi_i(x_1 x_2 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

del gruppo G_2. Essa genera un sottogruppo G_1 ad un parametro le cui equazioni finite

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n, \tau)$$

ove τ indica il parametro di G_1, sono determinate dalle equazioni differenziali

$$(9) \qquad \frac{dy_i}{d\tau} = \xi_i(y_1 y_2 \ldots y_n)$$

e dalle condizioni iniziali

$$y_i = x_i \qquad \text{per } \tau = 0$$

A questo G_1 in G_2 corrisponde un sottogruppo $G_1^{(1)}$ ad un parametro nel gruppo prolungato $G_2^{(1)}$, del quale calcoliamo subito la corrispondente trasformazione infinitesima derivando le (9) rapporto a t, ciò che dà

$$(9^*) \qquad \frac{dy_i^{(1)}}{dt} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\lambda} y_\lambda^{(1)}.$$

A queste vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$y_i^{(1)} = x_i^{(1)} \qquad \text{per } \tau = 0,$$

giacchè all'identità in G_2 corrisponde l'identità in $G_1^{(1)}$. Le (9), (9*) ci dimostrano che il gruppo $G_1^{(1)}$ è generato

dalla trasformazione inf. iterima

$$\mathfrak{X}^{(1)}F = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i\lambda} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}},$$

che introducendo la notazione

$$(10) \qquad \xi_i^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

scriviamo

$$(11) \qquad \mathfrak{X}^{(1)}F = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \xi_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

Dopo ciò è manifesto che se le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo G_r sono, nelle solite notazioni:

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2 \ldots r),$$

quelle del gruppo prolungato agli elementi lineari saranno le r

$$(12) \qquad X_k^{(1)}F = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \qquad (k = 1, 2 \ldots r)$$

ove si è posto

$$(12^*) \qquad \xi_{ki}^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

I due gruppi G_r, $G_r^{(1)}$ avendo lo stesso gruppo parametrico è evidente che le costanti di composizione c_{iks} per le $X_k f$ e per le $X_k^{(1)}F$ debbono essere le stesse, ciò che molto facilmente si constata sulla formola (12).

Ma possiamo dedurre lo stesso risultato in altro modo più generale dimostrando un teorema che merita di essere per sè rilevato.

Essendo

$$\mathfrak{X}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

una trasformazione infinitesima qualunque, chiamiamo trasformazione infinitesima prolungata (agli elementi lineari) la $\mathfrak{X}^{(1)}F$ definita dalla (11) - Consideriamo poi una seconda trasformazione infinitesima qualunque

$$\mathfrak{Y}f = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e la sua prolungata

$$\mathfrak{Y}^{(1)}F = \sum_i \eta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \eta_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

Se costruiamo la trasformazione alternata

$$(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)})$$

ponendo

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

con

$$(13) \qquad \xi_i = \mathfrak{X}(\eta_i) - \mathfrak{Y}(\xi_i),$$

troviamo subito

$$(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)}) = \{\mathfrak{X}(\eta_i) - \mathfrak{Y}(\xi_i)\} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \{\mathfrak{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathfrak{Y}(\xi_i^{(1)})\} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} +$$

$$+ \sum_i \sum_\lambda \left\{ \xi_\lambda^{(1)} \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \eta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} \right\} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

D'altronde dalla (13) formando

$$\xi_i^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

si ha subito

$$\xi_i^{(1)} = \mathfrak{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathfrak{Y}(\xi_i^{(1)}) + \sum_k \left(\xi_k^{(1)} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \eta_k^{(1)} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right)$$

ovvero

$$\xi_i^{(1)} = \mathfrak{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathfrak{Y}(\xi_i^{(1)}) + \sum_\lambda \left(\xi_\lambda^{(1)} \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \eta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} \right)$$

Ne segue la formola:

$$(44) \qquad (\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)}) = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \xi_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}},$$

che si da' il teorema in discorso:

La trasformazione prolungata di una trasformazione alternata $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ è eguale alla trasformazione alternata $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)})$ delle prolungate delle primitive.

Da questo teorema generale seguono nuovamente i risultati già sopra osservati –

§. 114

Modo come il sottogruppo di stabilità di un punto trasforma gli elementi lineari pel punto

Essendo G_r un gruppo qualunque, consideriamone il sottogruppo di stabilità di un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ qualunque dello spazio – Questo sottogruppo, nelle notazioni dei §§. 38 – 40, è un G_{r-r_0} con $r-r_0$ parametri, essendo $r-r_0$ il numero delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore in P_0 – Il G_{r-r_0} che lascia fisso P_0 trasformerà gli elementi lineari uscenti da questo punto secondo le sostituzioni di un gruppo lineare omogeneo nelle coordinate omogenee $x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$ di questi elementi lineari (§ 112) – Vogliamo calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici di questo gruppo projet-

tivo sugli elementi lineari uscenti da P_0 e determinare il numero dei suoi parametri, che naturalmente non potrà eccedere il numero

$$m = r - r_0$$

dei parametri del sottogruppo di stabilità G_m. Siano

$$X_1 f, X_2 f, \ldots X_m f$$

le trasformazioni generatrici di G_m che sono tutte e sole le trasformazioni di G_r d'ordine superiore. Sopra gli ∞^{2n-1} elementi lineari dello spazio il gruppo G_m agirà secondo il gruppo $G_m^{(1)}$ prolungato, colle trasformazioni infinitesime generatrici

$$(15) \qquad X_k^{(1)} F = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i,\lambda} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

Ma volendoci limitare alla considerazione degli ∞^{n-1} elementi lineari uscenti da P_0, osserviamo che rispetto alla totalità degli ∞^{2n-1} elementi lineari questi formano una varietà invariante caratterizzata dalle equazioni

$$x_1 = x_1^{(0)}, \; x_2 = x_2^{(0)}, \ldots \; x_n = x_n^{(0)}$$

Applicando la regola dimostrata alla fine del §. 44, di calcoleremo le trasformazioni infinitesime generatrici del detto gruppo projettivo sugli elementi lineari uscenti da P_0, sopprimendo nelle (15) i termini con $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ e ponendo negli altri $x_i = x_i^{(0)}$.

Così la (15) si riduce a

$$(16)\qquad L_k F = \sum_{i\lambda} b_{ki}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}},$$

dove i coefficienti costanti $b_{ki}^{(\lambda)}$ sono i coefficienti dei termini di primo grado negli sviluppi in serie

$$\xi_{ki} = \sum_\lambda b_{ki}^{(1)} (x_\lambda - x_\lambda^{(0)}) + \cdots\cdots$$

delle ξ_{ki}.

Se pensiamo distribuite le trasformazioni $X_1 X_2 \ldots X_m$ nel modo che abbiamo appreso nel § 38 e cioè in:

r_1 trasformazioni del 1º ordine $X_1 X_2 \ldots X_{r_1}$,

r_2 " del 2º ordine

. . . .

tutti i coefficienti $b_{ki}^{(\lambda)}$ provenienti dalle X d'ordine superiore al primo s'annullano e restano quindi soltanto r_1 trasformazioni infinitesime (16)

$$(17)\quad \begin{cases} L_1 F = \sum_{i\lambda} b_{1i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} \\ L_2 F = \sum_{i\lambda} b_{2i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} \\ - - - - - - - - - - - - - \\ L_{r_1} F = \sum_{i\lambda} b_{r_1 i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}, \end{cases}$$

come generatrici del gruppo projettivo cercato. Ma queste sono effettivamente indipendenti perchè se fosse

$$e_1 L_1 + e_2 L_2 + \cdots\cdots + e_{r_1} L_{r_1} = 0$$

la trasformazione di G_r

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots\cdots + e_{r_1} X_{r_1} f$$

sarebbe d'ordine superiore al primo, ciò che contraddice al modo come le $X_1 \dots X_{r_1}$ sono costruite (§ 38)_

Ne concludiamo:

Il sottogruppo di stabilità di un punto P_0 trasforma gli elementi lineari uscenti da P_0 secondo un gruppo projettivo con r_1 parametri, essendo r_1 il numero delle trasformazioni di 1° ordine in G_r colle quali non è possibile comporre trasformazioni d'ordine superiore.

Si osservi che per un punto generico ove i coefficienti delle equazioni di definizione del gruppo si comportano regolarmente, basterà conoscere queste equazioni (cf. § 39) per calcolare r_1 e le trasformazioni generatrici $I_k f$ del gruppo projettivo sugli elementi lineari.

Consideriamo ora due gruppi G_r, Γ_r simili e sia

$$18) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

una trasformazione che cangia l'uno nell'altro.

Se $P_0 = (x_i^{(0)})$, $Q_0 = (y_i^{(0)})$ sono due punti equivalenti per la (18), fra le coordinate omogenee $x_i^{(1)}, y_i^{(1)}$ di due elementi lineari corrispondenti uscenti da P_0, Q_0 sussistono le relazioni omogenee (7*)

$$(18^*) \qquad y_i^{(1)} = \sum_\lambda \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda}\right)_{x^{(0)}} x_\lambda^{(1)}$$

Queste cangiano il gruppo projettivo degli elementi lineari uscenti da P_0 in quello sopra gli elementi lineari per Q_0; questi due gruppi sono per ciò appartenenti entro il gruppo generale delle sostituzioni li_

neari omogeneo. In particolare se per la trasformazione (18) prendiamo una trasformazione di G_r stesso, Γ_r coincide con G_r e P_0, Q_0 sono due punti equivalenti (qualunque) rispetto a G_r.

Dunque: A due punti equivalenti P_0, Q_0 rispetto al gruppo G_r appartengono due gruppi projettivi sugli elementi lineari uscenti da essi, che sono affini entro il gruppo generale lineare omogeneo.

§. 115

Definizione degli invarianti differenziali

Veniamo ora al prolungamento dei gruppi agli elementi differenziali d'ordine superiore, che poniamo sotto la forma generale seguente.

Abbiasi un gruppo G_r sopra $m+n$ variabili di cui le prime $\underline{m}$ indichiamo con

$$x_1\ x_2 \ldots x_m$$

e le ultime $\underline{n}$ con

$$z_1\ z_2 \ldots z_n$$

e siano

$$x_i' = f_i(x_1\ x_2 \ldots x_m, z_1 \ldots z_n ; a_1\ a_2 \ldots a_r) \quad i=1,2 \ldots m$$
$$z_j' = \varphi_j(x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_n ; a_1\ a_2 \ldots a_r) \quad j=1,2 \ldots n$$

le equazioni finite del gruppo

Se nello spazio $S_{m+n} = (x_1 \ldots x_m\ z_1 \ldots z_n)$ consideriamo u

varietà V_m le cui equazioni si ottengono ponendo $z_1, z_2 \dots z_n$ uguali a funzioni analitiche indipendenti, che possono del resto essere affatto arbitrarie, di $x_1, x_2 \dots x_m$. ogni trasformazione (19) del gruppo G_r cangierà V_m in una varietà V'_m, le cui equazioni si otterranno prendendo le z' eguali a certe funzioni delle $x'_1 \dots x'_m$.

Ora le z possegono per ipotesi derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x_1 \dots x_m$, onde segue, come vedremo meglio fra breve, che le z' possegono derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x'_1 \dots x'_m$ ed ogni tale derivata d'ordine k delle z' si esprime per le analoghe derivate delle z rapporto alle x degli ordini

$$k, k-1, k-2 \dots 1$$

Il gruppo dato determina allora perfettamente un secondo gruppo sulle x, z e le derivate delle z rapporto alle x considerate tutte come variabili indipendenti; questo diciamo il gruppo prolungato del primitivo. – L'esempio considerato al § 112 del prolungamento del gruppo agli elementi lineari è manifestamente un caso particolare di questo generale, dove le x sono riguardate come funzioni di una variabile t sulla quale il gruppo G_r non opera.

Ciò premesso, ecco come si definiscono gli inva-

rianti differenziali:

Ogni espressione

$$J = F\left(x, z, \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_l} \dots\right)$$

formata colle x, le z e le derivate delle z rapporto alle x fino ad un certo ordine, che, per qualsiasi trasformazione del gruppo G_r, si cangi nella espressione stessa formata colle x', colle z' e le derivate delle z' rapporto alle x' dicesi un <u>invariante differenziale del gruppo G_r</u>

Diciamo poi che l'invariante differenziale J è d'ordine k, se le più alte derivate delle z che figurano in J sono d'ordine k.

Qualche esempio chiarirà subito l'importante definizione - Se consideriamo il gruppo dei movimenti nel piano (x, y) l'espressione

$$J = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

che dà il raggio di curvatura di una curva qualsiasi $y = f(x)$ è un invariante differenziale -

Così rispetto al gruppo di movimenti nello spazio sono invarianti differenziali di curve gobbe la prima curvatura (flessione) e la seconda curvatura (torsione); i loro ordini sono rispettivamente 2 e 3 -

Per una superficie sono invarianti differenziali del secondo ordine i due raggi principali r_1, r_2 di curvatura, o se si vuole la curvatura totale $K = \frac{1}{r_1 r_2}$, la curvatura media $H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.

varietà V_m le cui equazioni si ottengono ponendo $z_1, z_2 \ldots$ $\ldots z_n$ uguali a funzioni analitiche indipendenti, che possono del resto essere affatto arbitrarie, di $x_1, x_2 \ldots x_m$; ogni trasformazione (19) del gruppo G_r cangierà V_m in una varietà V'_m, le cui equazioni si otterranno prendendo le z' eguali a certe funzioni delle $x'_1 \ldots x'_m$.

Ora le z posseggono per ipotesi derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x_1 \ldots x_m$, onde segue, come vedremo meglio fra breve, che le z' posseggono derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x'_1 \ldots$ $\ldots x'_m$ ed ogni tale derivata d'ordine k delle z' si esprime per le analoghe derivate delle z rapporto alle x degli ordini

$$k, \; k-1, \; k-2 \; \ldots \; 1$$

Il gruppo dato determina allora perfettamente un secondo gruppo sulle x, z e le derivate delle z rapporto alle x considerate tutte come variabili indipendenti; questo diciamo il gruppo prolungato del primitivo. – L'esempio considerato al § 112 del prolungamento del gruppo agli elementi lineari è manifestamente un caso particolare di questo generale, dove le x sono riguardate come funzioni di una variabile t sulla quale il gruppo G_r non opera.

Ciò premesso, ecco come si definiscono gli inva-

rianti differenziali:

Ogni espressione

$$J = F\left(x, z, \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_l} \dots\right)$$

formata colle x, le z e le derivate delle z rapporto alle x fino ad un certo ordine, che, per qualsiasi trasformazione del gruppo G_r, si cangi nella espressione stessa formata colle x', colle z' e le derivate delle z' rapporto alle x' dicesi un <u>invariante differenziale del gruppo</u> G_r

Diciamo poi che l'invariante differenziale J è d'ordine k, se le più alte derivate delle z che figurano in J sono d'ordine k.

Qualche esempio chiarirà subito l'importante definizione - Se consideriamo il gruppo dei movimenti nel piano (x, y) l'espressione

$$J = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

che dà il raggio di curvatura di una curva qualsiasi $y = f(x)$ è un invariante differenziale -

Così rispetto al gruppo di movimenti nello spazio sono invarianti differenziali di curve gobbe la prima curvatura (flessione) e la seconda curvatura (torsione); i loro ordini sono rispettivamente 2 e 3 -

Per una superficie sono invarianti differenziali del secondo ordine i due raggi principali r_1, r_2 di curvatura, o se si vuole la curvatura totale $K = \frac{1}{r_1 r_2}$, la curvatura media $H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

Già in antiche teorie si erano presentati invarianti differenziali di gruppi particolari semplici, ma la loro teoria generale è dovuta a Lie, il quale ha riconosciuto che: ogni gruppo continuo finito (od infinito) possiede degli invarianti differenziali la cui determinazione si ottiene per operazioni algebriche quando siano date le equazioni finite del gruppo, ovvero integrando sistemi completi di equazioni a derivate parziali, assegnate le trasformazioni infinitesime generatrici.

Qui ci proponiamo di porre soltanto i principii di questa teoria per giungere alla dimostrazione delle proprietà ora enunciate.

§. 116
Trasformazioni prolungate

Consideriamo le z come funzioni delle x e per le derivate parziali delle z introduciamo la notazione:

$$(20) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} = z_{i;\,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} \text{ (*)}$$

Sia ora

$$(21) \quad \begin{cases} x'_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_m z_1 z_2 \dots z_n) & i = 1, 2 \dots m \\ z'_j = \varphi_j(x_1 x_2 \dots x_m z_1 z_2 \dots z_n) & j = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

(*) Questa notazione diversa da quella già usata al §. 33, riesce qui più opportuna.

una qualunque trasformazione sulle x e sulle z. In primo luogo facciamo vedere che, poste le z eguali a funzioni arbitrarie delle x entro le (21), si potranno dedurre le z' in funzione delle x', per il che bisognerà provare che le prime m equazioni (21) saranno risolubili rispetto alle x. Infatti pel determinante funzionale delle x' così espresso per le x abbiamo

$$(22)\qquad \frac{\partial(x'_1 x'_2 \dots x'_m)}{\partial(x_1 x_2 \dots x_m)} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_j^{1\dots n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_k} \right| \qquad i, k = 1, 2 \dots m$$

Decomponendo questo determinante in tanti determinanti parziali, si ha un'espressione razionale intera nelle derivate prime delle z, in cui figurano come coefficienti tutti i minori d'ordine m della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{matrix} \right\|$$

e questi non sono tutti nulli perchè le f sono funzioni indipendenti delle x e delle z. Se fosse zero il determinante (22), verrebbero legate le z e le loro derivate prime, ciò che è assurdo essendo le z funzioni arbitrarie delle x.

Ciò premesso, e potendo dunque considerare le z' come funzioni delle x', porremo come nella (20)

$$(20^*)\qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} z'_i}{\partial x_1'^{\alpha_1}\partial x_2'^{\alpha_2}\dots\partial x_m'^{\alpha_m}} = z'_{i;\,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

e dimostreremo che le nuove derivate

$$z'_{i;\,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

d'ordine $N=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m$ si esprimono per le x, z e le loro derivate parziali

$$z_{\nu;\,\beta_1\beta_2\dots\beta_m}\qquad(\nu=1,2\dots n)$$

dal primo ordine fino all'ordine N, e che nella formola corrispondente

$$(23)\qquad z'_{i;\,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = F_{i;\,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1\beta_2\dots\beta_m})$$

la forma della funzione F dipende unicamente dalla trasformazione (21) eseguita.

Per maggiore chiarezza cominciamo dall'osservare che per le derivate del primo ordine $\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}$ sussiste certo una formola (23) — Si ha infatti identicamente

$$dz'_i - \sum_k^{1\dots m}\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}dx'_k = 0$$

e per ciò, esprimendo colle (21) le x' e z' per le x e z:

$$\sum_s^{1\dots m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s}dx_s + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\lambda}dz_\lambda =$$

$$=\sum_k^{1\dots m}\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}\left\{\sum_s^{1\dots m}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}dx_s + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial f_k}{\partial z_\lambda}dz_\lambda\right\} -$$

Ponendo per dz_λ la sua espressione $\sum_s\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s}dx_s$, la precedente si muta in una relazione lineare fra $dx_1\dots dx_m$ che deve dunque essere un'identità — Eguagliando a zero i varii coefficienti ne risultano

per

$$\frac{\partial z'_i}{\partial x'_1}, \frac{\partial z'_i}{\partial x'_2} \cdots \cdots \frac{\partial z'_i}{\partial x'_m}$$

le m equazioni lineari

$$\sum_k^{1\ldots m} \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_s} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \frac{\partial f_k}{\partial z_\lambda} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s} \right\} \frac{\partial z'_i}{\partial x'_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\lambda} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s},$$

le quali sono risolubili rispetto alle dette derivate perché il determinante dei coefficienti non è che il determinante funzionale (22) e questo, come si è visto, non è nullo.

Per $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$ sussistono dunque certamente le (23), ed ora basterà provare che supposta l'esistenza di queste formole fino all'ordine N, esse valgono ancora per l'ordine seguente $N+1$.

Le derivate d'ordine $N+1$ delle z' rapporto alle x' sono da calcolarsi dalla formola

$$(24) \qquad dz'_{i;\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_m} - \sum_k^{1\ldots m} z'_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\alpha_k+1,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}\, dx'_k = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = N$$

Per mezzo delle (23) che si suppongono sussistere per l'ordine N possiamo, come sopra, cangiare la (24) in una relazione lineare fra $dx_1, dx_2 \ldots dx_m$, onde eguagliando a zero i varii coefficienti si otterrà un sistema di m equazioni lineari nelle m incognite

$$z'_{i;\alpha_1+1,\alpha_2\ldots\alpha_m}, \quad z'_{i;\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots\alpha_m}, \cdots \quad z'_{i;\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m+1}$$

e il determinante dei coefficienti sarà sempre il det-

minante (22) diverso da zero, onde risulta provata la nostra asserzione -

È da osservarsi che, eseguendo questo calcolo, si ottengono in apparenza espressioni diverse per una medesima derivata $z'_{i;\beta_1\ldots\beta_m}$ (*), ma in realtà queste coincideranno necessariamente perchè in caso diverso (dovendo certamente sussistere insieme) legherebbero le z e le loro derivate -

Possiamo dunque concludere:

Una trasformazione qualunque (21) sulle x e sulle z individua una trasformazione sulle derivate delle z rapporto alle x, fino ad un ordine qualunque N, secondo le formole (23)

$$(23) \qquad z'_{i;\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = F_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1\beta_2\ldots\beta_m})$$

$$0 < \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m \leq N$$

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m \leq \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$$

La trasformazione data dalle (21), (23) insieme dicesi la trasformazione prolungata dell'ordine N della (21).

§ 117
Gruppi prolungati

Suppongasi ora di eseguire dopo la trasformazione (21) una seconda trasformazione

$$x''_i = \bar{f}_i(x', z') \quad , \quad z''_j = \bar{\varphi}_j(x', z')$$

(*) Così per e. la derivata $z'_{i;1,1,0\ldots0}$ potrà calcolarsi sia da $z'_{i;1,0,0\ldots0}$ sia da $z'_{i;0,\ldots}$

e di calcolare le altre formole della relativa trasformazione prolungata

$$z''_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = F_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x', z', z'_\nu; p_1 \dots p_m)$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m \leqq N$$

Se per mezzo delle (21), (23) ne eliminiamo le x', z', avremo formole del tipo

$$x''_i = \bar{\bar{f}}_i(x, z) \quad , \quad z''_j = \bar{\bar{\varphi}}_j(x, z)$$

$$z''_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = \Phi_{i;\alpha_1\dots\alpha_m}(x, z, z_\nu; p_1 \dots p_m)$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m \leqq N \, ,-$$

le quali rappresentano evidentemente il prodotto delle due trasformazioni prolungate. D'altra parte se calcoliamo la trasformazione prolungata della trasformazione composta

$$x''_i = \bar{\bar{f}}_i(x, z) \quad , \quad z''_j = \bar{\bar{\varphi}}_j(x, z)$$

dobbiamo trovare le stesse formole per $z''_{i;\alpha_1\dots\alpha_m}$ in funzione delle $x, z, z_\nu; p_1 \dots p_m$; altrimenti, per un'osservazione già fatta sopra, ne conseguirebbero delle relazioni fra le x, z e le derivate delle z. Questo risultato può enunciarsi col teorema:

La trasformazione prolungata del prodotto di due trasformazioni coincide col prodotto delle due trasformazioni prolungate delle componenti.

Segue di qui immediatamente che se si ha una serie ∞^r di trasformazioni (21)

$$(25)\quad x_i' = f_i(x, z; a_1 \ldots a_r) \; , \; z_j' = \varphi_j(x, z; a_1 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots m \qquad\qquad j = 1, 2 \ldots n$$

formanti un gruppo G_r, costituiramo ancora un gruppo a $\underline{r}$ parametri le loro trasformazioni prolungate dell'ordine N:

$$(25^*)\begin{cases} x_i' = f_i(x, z; a) \qquad\qquad z_j' = \varphi_j(x, z; a) \\ z'_{i;\alpha_1 \ldots \alpha_m} = F_{i;\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x, z, z_{\lambda;\beta_1 \ldots \beta_m}; a) \\ \qquad\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \leq N \end{cases}$$

Diremo questo il gruppo prolungato d'ordine N del primitivo e lo indicheremo con $G_r^{(N)}$ - È manifesto che i due gruppi G_r, $G_r^{(N)}$ hanno lo stesso gruppo parametrico, ossia sono oloedricamente isomorfi.

Vogliamo ora calcolare le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo prolungato $G_r^{(N)}$ note che siano le generatrici

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots m} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \eta_{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

del gruppo G_r -

All'identità in G_r corrispondendo l'identità in $G_r^{(N)}$, ogni trasformazione infinitesima

$$Xf = \sum_k^{1\ldots m} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial z_\lambda}$$

di G_r dà luogo ad una trasformazione infinitesima determinata di $G_r^{(N)}$; questa indicheremo con

$$(26)\quad X^{(N)} f = \sum_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} + $$
$$+ \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}^{1\ldots N} \sum_k^{1\ldots n} \zeta_{k;\alpha_1 \ldots \alpha_m} \frac{\partial f}{\partial z_{k;\alpha_1 \ldots \alpha_m}}$$

e la chiameremo la trasformazione infinitesima prolungata d'ordine N della Xf. Per calcolare i suoi coefficienti

$$\xi_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m}$$

della $X^{(N)}f$ in funzione delle

$$x,\ z,\ z_{i;p_1\ldots p_m}$$

si osserva che, se col simbolo δ si indicano gli incrementi dovuti alla trasformazione (26), si ha:

$$\delta x_k = \xi_k\,\delta t\,, \quad \delta z_\lambda = \eta_\lambda\,\delta t\,, \quad \delta z_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m} = \xi_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m}\,\delta t.$$

Ora abbiamo identicamente

$$\delta\left\{dz_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m} - \sum_k^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\ldots\alpha_m}\,dx_k\right\} = 0$$

e quindi, per l'invertibilità dei simboli $d,\ \delta$

$$d\xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m} = \sum_k^{1\ldots m} \xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}\,dx_k +$$

$$+\sum_k^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}\,d\xi_k$$

Esprimendo tutti i differenziali $dx_1\ldots dx_m$ colla formula

$$d\Phi(x,z) = \sum_k^{1\ldots m}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1\ldots n}\frac{\partial\Phi}{\partial z_\lambda}\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_k}\right\}dx_k$$

ed eguagliando a zero i coefficienti di $dx_1\ldots dx_m$, otteniamo la formola

$$(27)\qquad \xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots m} = \frac{d\xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m}}{dx_k} - \sum_\lambda^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\lambda-1},\,\alpha_\lambda+1,\,\alpha_{\lambda+1}\ldots\alpha_m}\frac{d\xi_\lambda}{dx_k}.$$

dove il simbolo $\frac{d}{dx_k}$ indica la derivata totale della funzione che si considera rapporto ad x_k, in quanto cioè x_k entra anche nelle z e nelle $z_{i;\,p_1 \dots p_m}$.

Colle (η_i') calcoleremo effettivamente tutti i coefficienti ζ d'ordine $N+1$, una volta calcolati quelli d'ordine N ed inferiore.

Anche qui è da osservarsi che per un medesimo coefficiente ζ si otterranno dal calcolo più espressioni, le quali però debbono necessariamente coincidere poichè gli incrementi che subiscono le derivate delle z sono già pienamente determinate da quelli che subiscono le x e le z stesse.

Alle r trasformazioni infinitesime di G_r

$$X_1 f \dots X_r f$$

corrisponderanno così le r trasformazioni prolungate

$$X_1^{(N)} f,\ X_2^{(N)} f \dots X_r^{(N)} f,$$

generatrici di $G_r^{(N)}$. Le costanti di composizione c_{iks} pei due gruppi G_r, $G_r^{(N)}$, oloedricamente isomorfi, debbono essere le stesse, ciò che si potrebbe constatare anche col calcolo diretto.

§ 118
Esistenza e calcolo degli invarianti differenziali

Se ritorniamo alla definizione data al § 115 degli invarianti differenziali, vediamo che un invariante differenziale

$$\Phi(x, z, z_{y; \beta_1 \dots \beta_m}) \qquad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m \leq N$$

d'ordine N del gruppo G_r non è altro che un invariante ordinario del gruppo prolungato d'ordine N $G_r^{(N)}$; e l'inversa è pur vera evidentemente.

La ricerca degli invarianti differenziali di un gruppo è così ricondotta a quella degli invarianti ordinarii dei suoi gruppi prolungati. Ciò fa riconoscere ad un tempo l'effettiva esistenza di invarianti differenziali di tutti gli ordini sufficientemente elevati, e dà il modo di calcolarli.

In effetto prendendo N sufficientemente grande il gruppo prolungato $G_r^{(N)}$ e tutti i successivi risulteranno intransitivi (almeno appena che il numero delle variazioni su cui opera $G_r^{(N)}$ supera N), essi avranno quindi degli invarianti ordinarii che saranno invarianti differenziali di G_r. Quanto al calcolo di questi invarianti, se sono note le equazioni finite di G_r, coi processi d'eliminazione e derivazione dei paragra-

si precedenti si calcoleranno le equazioni finite dei gruppi prolungati e con sole operazioni di eliminazione si avranno quindi i loro invarianti (§ 49).

Se poi di G_r sono date soltanto le trasformazioni infinitesime, si calcoleranno colle formole del paragrafo precedente le trasformazioni infinitesime dei gruppi prolungati e colla integrazione di sistemi completi si avranno gli invarianti –

Del resto questo secondo metodo è il più spesso preferibile, quando anche si conoscano le equazioni finite di G_r, per le difficoltà che si presentano in pratica alle eliminazioni indicate dal metodo teorico –

Così abbiamo effettivamente dimostrato quanto avevamo enunciato al § 115. Qui facciamo ancora le osservazioni seguenti – Se confrontiamo fra loro due varietà dello stesso numero di dimensioni nello spazio in cui opera il gruppo, diciamo equivalenti le due varietà rispetto al gruppo quando con trasformazioni del gruppo si passa dall'una all'altra. Perchè due varietà siano equivalenti è manifestamente necessario che ogni invariante differenziale dell'una eguagli il corrispondente invariante differenziale dell'altra –

La serie delle varietà equivalenti ad una data

forma, come è chiaro, un ente invariabile per tutte le trasformazioni del gruppo. Se il gruppo ha r parametri la serie di queste varietà sarà in generale ∞^r; costituirà invece una serie d'infinità minore diciamo ∞^{r-p} allora ed allora soltanto che esistono nel gruppo ∞^p trasformazioni che lasciano fissa la varietà iniziale. Evidentemente queste ∞^p trasformazioni di G_r costituiscono un sottogruppo G_p; le altre varietà della serie hanno sottogruppi affini a G_p.

§ 119

Invarianti differenziali dei gruppi su due variabili

Applichiamo le teorie generali sopra esposte al caso dei gruppi su due variabili (x, y), dove vogliamo spingere alquanto più avanti la ricerca degli invarianti differenziali e delle loro proprietà.

Osserviamo in primo luogo come si costruisce la trasformazione prolungata di una trasformazione infinitesima su due variabili

$$(28) \qquad Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Considerando la y come funzione della x, poniamo qui

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \ , \ \frac{d^2y}{dx^2} = y_2 \ , \ \ldots \ldots \frac{d^N y}{dx^N} = y_N$$

e prolunghiamo N volte la trasformazione (28) - Indicando con

$$(29) \quad X^{(N)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + \eta_N \frac{\partial f}{\partial y_N}$$

la trasformazione prolungata, basterà per calcolare $\eta_1 \ \eta_2 \ \ldots$ applicare alle equazioni

$$dy - y_1 dx = 0 \ , \ dy_1 - y_2 dx = 0, \ \ldots \ldots dy_{N-1} - y_N dx = 0$$

la differenziazione col simbolo δ (§ 117) -

Indicando col simbolo $\frac{d}{dx}$ la derivazione totale rapporto a x, troviamo:

$$(30) \quad \eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y_1 \frac{d\xi}{dx} \ , \ \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx} - y_2 \frac{d\xi}{dx} \ , \cdots \eta_N = \frac{d\eta_{N-1}}{dx} - y_N \frac{d\xi}{dx}$$

Consideriamo ora un gruppo G_r sulle due variabili x, y e siano

$$X_1f, \ X_2f \ \ldots \ X_rf$$

le sue trasformazioni infinitesime - Il gruppo prolungato $r-1$ volte

$$G_r^{(r-1)} \equiv (X_1^{(r-1)}f \ \ldots \ X_r^{(r-1)}f)$$

è certamente intransitivo perchè il numero delle variabili

$$x, \ y, \ y_1, \ y_2 \ \cdots \ y_{r-1}$$

supera di 1 il numero r dei parametri - Esiste quindi certamente un invariante differenziale di ordine $r-1$ o inferiore - Ma noi vogliamo provare che ne esiste uno soltanto, ossia che le r trasforma-

zioni infinitesime di $G_r^{(r-1)}$ non sono legate fra loro da alcuna relazione lineare, con coefficienti funzioni delle variabili

$$x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1}$$

Ammettiamo il contrario; allora esisterebbero almeno due invarianti indipendenti u, v d'ordine $r-1$ od inferiore

$$u = u(x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1})$$
$$v = v(x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1})$$

Se consideriamo una curva qualunque C nel piano, purchè non sia una curva integrale dell'equazione differenziale $u = \text{cost}^{te}$ o dell'altra $v = \text{cost}^{te}$, l'equazione di C si potrà sempre scrivere sotto la forma

$$(31) \qquad v = \psi(u)$$

perchè lungo di essa saranno u, v funzioni l'uno dell'altro. D'altra parte possiamo anche scegliere C in modo che non ammetta alcuna trasformazione infinitesima di G_r, che non sia cioè traiettoria di alcun sottogruppo G_1 di G_r (*). Allora, per l'osservazione generale fatta alla fine del paragrafo precedente, la curva C percorre per le trasformazioni di G_r una serie ∞^r. Ma la curva C è un integrale dell'equa-

(*) Queste traiettorie formano infatti una serie ∞^r e basta scegliere C fuori di essa.

zione differenziale (31) d'ordine $r-1$ o inferiore, le cui curve integrali si trasformano l'una nell'altra per le trasformazioni di G_r poichè u, v sono invarianti differenziali d'ordine $r-1$. E poichè queste curve integrali della (31) formano al massimo una serie ∞^{r-1} troviamo due risultati contraddittorii, che ci dimostrano l'impossibità dell'esistenza di due diversi invarianti differenziali d'ordine $r-1$ o inferiore. Dunque intanto: il gruppo G_r su due variabili possiede fino all'ordine $r-1$ un solo invariante, che indichiamo con J_{r-1}.

Vediamo ora quello che accade per gli ordini successivi. Per l'ordine r le equazioni

$$X_k^{(r)} f = 0 \qquad k = 1, 2 \cdots r$$

formano un sistema completo di r equazioni indipendenti (essendo già indipendenti, come si è visto, le precedenti $X_k^{(r-1)} f = 0$) colle $r+2$ variabili

$$x, y, y_1, y_2 \cdots y_r$$

Esso ha quindi $r+2-r=2$ soluzioni: una è evidentemente l'invariante differenziale precedente J_{r-1}, l'altra un secondo invariante differenziale J_r che contiene effettivamente y_r, cioè è proprio dell'ordine r, altrimenti J_r soddisferebbe alle precedenti $X_k^{(r-1)} f = 0$. Similmente per $N = r+1$ le equazioni

$$X_k^{(r+1)} f = 0$$

avremo $r+3-r=3$ soluzioni, cioè una oltre J_{r-1}, J_r e

questa sarà un terzo invariante differenziale di ordine $= r+1$, J_{r+1}.

Così continuando veniamo a dimostrare il teorema:

Un gruppo G_r su due variabili con r parametri possiede un solo invariante differenziale J_{r-1} d'ordine $< r$ (*); per ogni altro ordine successivo $r, r+1, r+2 \ldots\ldots$ esiste uno ed un solo invariante differenziale corrispondente

$$J_r, \; J_{r+1}, \; J_{r+2} \ldots\ldots$$

Possiamo ora andare più oltre e dimostrare che basta conoscere i due primi invarianti differenziali J_{r-1}, J_r per dedurne tutti i successivi con semplici processi di derivazione. Per ciò si consideri l'equazione differenziale

$$J_r - aJ_{r-1} - b = 0,$$

dove a, b sono due costanti, equazione d'ordine precisamente $= r$. Le sue ∞^r curve integrali costituiscono una serie invariante rispetto al gruppo, qualunque sia la costante b; eliminando questa per differenziazione (totale) ne risulta che anche le ∞^{r+1} curve integrali dell'equazione d'ordine $r+1$

$$\frac{dJ_r}{dx} - a\frac{dJ_{r-1}}{dx} = 0$$

(*) Si può anche dare il caso che J_{r-1} non sia un invariante differenziale nel senso proprio ma un invariante ordinario; ciò avviene se G_r è intransitivo.

ossia

$$(32) \qquad \frac{\frac{dJ_r}{dx}}{\frac{dJ_{r-1}}{dx}} = a \quad (*)$$

costituiscono una serie invariante, qualunque sia q.

Il primo membro della (32) non varia dunque per qualunque trasformazione di G_r; esso è perciò un invariante differenziale d'ordine evidentemente eguale a $r+1$ e può essere preso per J_{r+1}

$$J_{r+1} = \frac{\frac{dJ_r}{dx}}{\frac{dJ_{r-1}}{dx}} = \frac{dJ_r}{dJ_{r-1}}$$

Analogamente

$$J_{r+2} = \frac{dJ_{r+1}}{dJ_{r-1}} = \frac{\frac{d^2J_r}{dx^2}}{\frac{d^2J_{r-1}}{dx^2}},$$

in generale

$$(33) \qquad J_{r+p} = \frac{\frac{d^pJ_r}{dx^p}}{\frac{d^pJ_{r-1}}{dx^p}}$$

Concludiamo: Noti i due primi invarianti differenziali del gruppo G_r

---

(*) Si ricordi che il simbolo $\frac{d}{dx}$ indica derivazione totale rapporto ad x, cioè

$$\frac{d}{dx}\varphi(x, y, y_1, y_2 \ldots\ldots) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}y_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_3 + \ldots$$

i successivi se ne ottengono per derivazione mediante la formola generale (33) -

§ 120

Esempi di calcolo d'invarianti differenziali

Applichiamo ora questi risultati a qualche esempio semplice -

1) Prendiamo il gruppo G_3 di movimenti nel piano generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

e calcoliamone gli invarianti differenziali I_2, I_3 di secondo e di terzo ordine mediante i quali si esprimono con derivazione tutti gli altri - Prolungando perciò le Xf tre volte, e riprendendo le solite notazioni per le derivate, dalle formole (29), (30) del paragrafo precedente deduciamo:

$$X_1^{(3)} f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad X_2^{(3)} f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_3^{(3)} f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''} +$$

$$+ (3y''^2 + 4y'y''')\frac{\partial f}{\partial y'''}$$

I due invarianti differenziali saranno quindi le due soluzioni del sistema

$$X_1^{(3)} f = 0 \quad , \quad X_2^{(3)} f = 0 \quad , \quad X_3^{(3)} f = 0$$

ossia le due soluzioni, funzioni di y', y'', y''' della equa

zione

$$(1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''} + (3y''^2+4y'y''')\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0,$$

e in fine i due integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''} = \frac{dy'''}{3y''^2+4y'y'''}$$

Come primo integrale si può prendere

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \cos t = \frac{1}{c}$$

ed abbiamo quindi per l'invariante differenziale del 2° ordine di una curva piana

$$J_2 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

che è la nota espressione del raggio ρ di curvatura. Sostituendo poi nella

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy'''}{3y''^2+4y'y'''}$$

per y'' il valore

$$y'' = c(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

si ha un'equazione lineare per y''' e si trova subito che per secondo invariante si può prendere

$$J_3 = \frac{3y'y''^2-(1+y'^2)y'''}{(1+y'^2)^3}$$

È facile vedere quale è il significato geometrico di questo invariante differenziale del 3° ordine. Indicando infatti con ds l'elemento d'arco della curva si ha:

$$ds = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

e da

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

si trae

$$y''^2 \frac{d\rho}{dx} = 3y'y''^2(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= (1+y'^2)^{\frac{7}{2}} \cdot J_3$$

cioè

$$\frac{y''^2}{(1+y'^2)^3} \frac{d\rho}{ds} = J_3$$

o in fine

$$J_3 = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Per gli invarianti differenziali successivi, secondo quanto si è visto alla fine del paragrafo precedente, possiamo prendere le successive derivate della curvatura $\frac{1}{\rho}$ rispetto all'arco. Dunque:

Gli invarianti differenziali di una curva piana rispetto al gruppo dei movimenti sono la sua curvatura $\frac{1}{\rho}$ e le successive derivate della curvatura rispetto all'arco.

8) Un altro esempio notevole è il seguente. Si consideri il gruppo G_3 (intransitivo) su x, y che si ottiene mantenendo ferma la x e trasformando la y secondo il generale gruppo projettivo:

$$x' = x \;, \quad y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \;;$$

le trasformazioni infinitesime di G_3 sono

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} \;, \quad X_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} \;, \quad X_3 f = y^2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

Qui l'invariante $J_{r-1} = J_2$ si riduce all'invariante

ordinario x ed abbiamo poi un invariante differenziale J_3 del 3º ordine che calcoliamo prolungando tre volte $X_i f$, ciò che dà:

$$X_1^{(3)}f = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , X_2^{(3)}f = y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} \, ,$$

$$X_3^{(3)}f = y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2yy'\frac{\partial f}{\partial y'} + 2(y'^2 + yy'')\frac{\partial f}{\partial y''} +$$

$$+ \, 2(3y'y'' + yy''')\frac{\partial f}{\partial y'''}$$

L'invariante J_3 è quella funzione di y', y'', y''' che soddisfa le due equazioni

$$(\alpha) \qquad y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} + y'''\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0$$

$$2yy'\frac{\partial f}{\partial y'} + 2(y'^2 + yy'')\frac{\partial f}{\partial y''} + 2(3y'y'' + yy''')\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0,$$

la quale seconda diventa per la prima

$$(\beta) \qquad y'\frac{\partial f}{\partial y''} + 3y''\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0$$

Per la (α) la f deve essere una funzione φ dei rapporti:

$$\xi = \frac{y''}{y'} \qquad \eta = \frac{y'''}{y'}$$

e sostituendo in (β) questa diviene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 3\xi\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

Dunque l'invariante domandato è:

$$J_3 = \eta - \frac{3}{2}\xi^2 = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^2} = \left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2;$$

questa espressione è la così detta derivata Schwarziana della y rapporto alla x, che gode della proprietà caratteristica di non mutare comunque si tra_

sformi linearmente la funzione y. Essa ha molta importanza nella teoria delle equazioni differenziali lineari ed in problemi di rappresentazione conforme -

§. 121

Invarianti differenziali di superficie rispetto ai gruppi di movimento

Per trattare anche un esempio di un gruppo a 3 variabili prendiamo il gruppo G_6 di movimenti nello spazio e calcoliamo gli invarianti differenziali del 1° ordine di una superficie.

Ma prima osserviamo come si prolunga una qualunque trasformazione infinitesima a tre variabili

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

riguardando z come funzione di x, y e ponendo, colle notazioni di Monge

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Se applichiamo alle equazioni

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad , dp = r\,dx + s\,dy \, , \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

la differenziazione col simbolo δ della trasformazione infinitesima avremo

$$(31)\quad X^{(2)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + P\frac{\partial f}{\partial p} + Q\frac{\partial f}{\partial q} + R\frac{\partial f}{\partial r} + S\frac{\partial f}{\partial s} + T\frac{\partial f}{\partial t} \, ,$$

ove si ponga

$$(35)\begin{cases} P = \frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}, & Q = \frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy} \\ R = \frac{dP}{dx} - r\frac{d\xi}{dx} - s\frac{d\eta}{dx}, & T = \frac{dQ}{dy} - s\frac{d\xi}{dy} - t\frac{d\eta}{dy} \\ S = \frac{dP}{dy} - r\frac{d\xi}{dy} - s\frac{d\eta}{dy} = \frac{dQ}{dx} - s\frac{d\xi}{dx} - t\frac{d\eta}{dx}, \end{cases}$$

i simboli $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ rappresentando derivazioni totali rapporto a x o a y.

Nel caso del gruppo G_6 di movimenti colle 6 trasformazioni infinitesime:

$$X_1f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_6f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},$$

prolungando queste due volte, facendo uso delle (34), (35), troviamo:

$$X_1^{(2)}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2^{(2)}f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3^{(2)}f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4^{(2)}f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q} + 2s\frac{\partial f}{\partial r} + (t-r)\frac{\partial f}{\partial s} - 2s\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$X_5^{(2)}f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} - pq\frac{\partial f}{\partial p} - (1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q} - (2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial r} -$$

$$-(2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial s} - 3qt\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$X_6^{(2)}f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} + (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p} + pq\frac{\partial f}{\partial q} + 3pr\frac{\partial f}{\partial r} +$$

$$+(2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial s} + (2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial t}$$

Esistono dunque invarianti differenziali del 2° ordine che sono soluzioni in p, q, r, s, t del sistema delle tre equazioni che si ottengono da $X_4^{(2)}, X_5^{(2)}, X_6^{(2)}$

sopprimendo i termini in $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ed eguagliando a zero.
Si verifica facilmente che per questi due invarianti possono prendersi le note espressioni

$$K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

$$H = \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$$

della curvatura totale (o di Gauss) K e della curvatura media H che sono il prodotto e la somma delle due curvature principali $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ - Naturalmente potrebbero anche prendersi per questi due invarianti le curvature stesse principali $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ o le loro inverse, ossia i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2

Prolungando una terza volta $X_1 f \ldots X_6 f$ per trovare gli invarianti differenziali del 3º ordine, crescerebbe di 4 il numero delle variabili (derivate del 3º ordine di z) e però ai due invarianti del 2º ordine H, K se ne aggiungono 4 del 3º ordine; per questi possono prendersi le derivate delle curvature principali rispetto agli archi delle linee di curvatura, come è chiaro geometricamente -

Capitolo X°

I gruppi continui finiti sopra una o sopra due variabili –

§. 122
Numero dei parametri in un gruppo sopra una variabile

Colle teorie svolte nei precedenti nove capitoli abbiamo posto i fondamenti della teoria generale dei gruppi continui finiti – Vogliamo ora passare ad occuparci di alcune classi speciali di gruppi ed in primo luogo esporremo la determinazione, effettuata da Lie, di tutti i tipi possibili di gruppi continui finiti sopra una e sopra due variabili,(*) ove si computano come appartenenti allo stesso tipo tutti e soli i gruppi simili fra di loro.

Per i gruppi sopra una sola variabile, o come di

(*) Anche la determinazione di tutti i possibili gruppi continui finiti nello spazio (su tre variabili) è stata effettuata da Lie. (Theorie der Transformationsgruppen III Kap. 7)

cemo pei gruppi sulla retta, Lie ha ottenuto il singolare risultato che il numero r dei parametri di un tale gruppo non può superare il numero 3 e che il gruppo è necessariamente simile al gruppo proiettivo sopra una variabile o ad un suo sottogruppo.
Questo risultato è tanto più notevole che appena il numero n delle variabili è >1 esistono certamente gruppi con quanti si vogliano parametri, p. e. il gruppo Abeliano

$$G_r \equiv \left(\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \dots \varphi_r \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

dove $\varphi_1 \, \varphi_2 \dots \varphi_r$ sono r funzioni arbitrarie delle prime n-1 variabili $x_1 \dots x_{n-1}$, soggette solo alla condizione di essere linearmente indipendenti. Le equazioni finite di un tale gruppo sono evidentemente

$$x_1' = x_1, \; x_2' = x_2 \; \dots \; x_{n-1}' = x_{n-1}, \; x_n' = x_n + e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 \dots + e_r\varphi_r$$

La prima parte del teorema di Lie sopra enunciato, che cioè per un gruppo G_r sopra una sola variabile x sia necessariamente $r \leq 3$, risulta facilmente da quanto abbiamo esposto ai §§ 38, 39 rispetto alla distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici di un gruppo. Per un punto generico $x = x^{(0)}$ si avranno infatti

r_0	trasformazioni	d'ordine	zero
r_1	"	"	uno
r_2	"	"	2

I numeri r sono tutti diversi da zero, ma nel caso attuale di una sola variabile, se si rammenta che

$$r_0\ ,\ r_0+r_1\ ,\ r_0+r_1+r_2\ \ldots\ldots$$

sono le rispettive caratteristiche delle matrici

$$\mathfrak{M}_0 = \begin{Vmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{r1} \end{Vmatrix} , \quad \mathfrak{M}_1 = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi'_{r1} \end{Vmatrix} , \quad \mathfrak{M}_2 = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} & \xi''_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi'_{r1} & \xi''_{r1} \end{Vmatrix}$$

- - - - - - - - -

che non possono crescere che di un'unità, si vede che tutte le r sono $=1$, cioè:

Un gruppo G_r sopra una variabile ha per un punto generico una sola trasformazione di ciascuno degli ordini

$$0, 1, 2, \ldots\ldots r-1$$

e nessuna d'ordine superiore.

D'altra parte ricorriamo alla proprietà dimostrata al §. 37 che se Xf, Yf sono due trasformazioni infinitesime degli ordini h, k la trasformazione alternata (XY) è <u>almeno</u> d'ordine $h+k-1$, che qui, nel caso di una sola variabile, completiamo con l'osservazione: se $h \neq k$ la trasformazione (XY) è effettivamente d'ordine $h+k-1$.

E infatti se sviluppando in serie di potenze di $x-x_0$ abbiamo (omettendo i termini di grado superiore)

$$Xf = \{a(x-x_0)^h + \ldots\ldots\} \frac{df}{dx} \qquad a \neq 0$$

$$Yf = \{ b(x-x_0)^k + \ldots \} \frac{df}{dx} \qquad b \neq 0$$

risulta

$$(XY) = \{ ab(k-h)(x-x_0)^{h+k-1} + \ldots \} \frac{df}{dx}$$

ed è $ab(k-h) \neq 0$.

Le due trasformazioni d'ordine $r-2$, $r-1$ danno dunque formando l'espressione alternata, una trasformazione d'ordine $= 2r-4$, e perciò

$$2r - 4 \leq r - 1$$

da cui appunto

$$r \leq 3 \qquad c.d.d.$$

Ne concludiamo: Un gruppo G_r sopra una sola variabile non può possedere più di 3 parametri.

§. 123

Riduzione dei gruppi sopra una variabile a gruppi projettivi

Veniamo ora alla seconda parte del teorema, cioè a dimostrare che i gruppi sopra una variabile sono tutti simili a gruppi projettivi.

1° Se si tratta di un gruppo ad un sol parametro, si ha un'unica trasformazione infinitesima d'ordine zero che, con un cangiamento di variabile, possiamo ridurre alla forma

$$Xf = \frac{df}{dx}$$

e il gruppo generato è il gruppo di traslazioni

$$x' = x + a \qquad (\text{cf. } \S\, 9)$$

2º Il numero r dei parametri sia $= 2$. Le due trasformazioni generatrici d'ordine zero e uno rispettivamente si potranno scrivere

$$X_1 f = \{1 + a(x - x_0) + \dots\} \frac{df}{dx}$$

$$X_2 f = \{(x - x_0) + \dots\dots\} \frac{df}{dx}$$

da cui

$$(X_1 X_2) = \{1 + b(x - x_0) + \dots\} \frac{df}{dx}$$

Dovremo dunque avere

$$(X_1 X_2) = X_1 f + b X_2 f$$

e sostituendo $X_1 f + b X_2 f$ ad $X_1 f$, sarà

$$(1) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f$$

Ora cangiando la variabile x facciamo, come sopra

$$X_1 f = \frac{df}{dx}$$

e sia

$$X_2 f = \xi \frac{df}{dx} \; ;$$

dovrà essere per la (1) $\frac{d\xi}{dx} = 1$, indi $\xi = x - x_0$. Il nostro gruppo G_2 è quindi generato dalle due trasformazioni

$$\frac{df}{dx} \; , \; x \frac{df}{dx}$$

e coincide per ciò (§ 75) col gruppo delle sostituzioni lineari intere

$$x' = a_1 x + a_2$$

3° Sia in fine $r=3$ - Per le trasformazioni generatrici potremo prendere

$$X_1f=\{1+\dots\}\frac{df}{dx}\,,\ X_2f=\{(x-x_0)+\dots\}\frac{df}{dx}\,,\ X_3f=\{(x-x_0)^2\dots\}\frac{df}{dx}$$

onde

$$(X_1X_2)=\{1+\dots\}\frac{df}{dx}\,,(X_1X_3)=\{2(x-x_0)+\dots\}\frac{df}{dx}\,,$$

$$(X_2X_3)=\{(x-x_0)^2+\dots\}\frac{df}{dx}\,.$$

Le formule di composizione prenderanno quindi la forma

$$(2)\ (X_1X_2)=X_1f+aX_2f+bX_3f\,,(X_1X_3)=2X_2f+cX_3f\,,(X_2X_3)=X_3f$$

con a, b, c costanti. Alla X_1f sostituiamo

$$X_1'f=X_1f+\lambda X_2f+\mu X_3f\qquad(\lambda,\mu\text{ costanti})$$

ed avremo

$$(X_1'X_2)=X_1f+aX_2f+bX_3f-\mu X_3f=$$
$$=X_1'f+(a-\lambda)X_2f+(b-2\mu)X_3f,$$

onde facendo $\lambda=a$, $\mu=\frac{1}{2}b$ sarà

$$(X_1'X_2)=X_1'f\,.$$

Possiamo dunque supporre nella (2) $a=0$, $b=0$ e dall'identità di Jacobi

$$((X_1X_2),X_3)+((X_2X_3),X_1)+((X_3X_1),X_2)=0$$

cioè

$$(X_1,X_3)+(X_3,X_1)-(2X_2+cX_3\,,X_3)=0$$

segue che anche $c=0$ - La composizione del nostro G_3 è adunque la seguente:

(3) $(X_1 X_2) = X_1 f \ , \ (X_2 X_3) = 2 X_2 f \ , (X_2 X_3) = X_3 f$.

Queste ci dimostrano che $X_1 f$, $X_2 f$ formano un sottogruppo G_2 del tipo esaminato nel caso precedente; possiamo quindi fare

$$X_1 f = \frac{df}{dx} \ , \ X_2 f = (x - x_0)\frac{df}{dx}$$

Le (3) danno quindi

$$\frac{d\xi}{dx} = 2(x - x_0) \ , (x - x_0)\frac{d\xi}{dx} = 2\xi$$

e perciò

$$\xi = (x - x_0)^2$$

Il nostro G_3 è dunque generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$\frac{df}{dx} \ , \ x\frac{df}{dx} \ , \ x^2\frac{df}{dx}$$

e coincide per ciò col gruppo generale projettivo della x (§. 75).

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Ogni gruppo sopra una variabile può avere soltanto uno o due o tre parametri. Nel primo caso esso è simile al gruppo di traslazioni

$$x' = x + a \ ,$$

nel secondo al gruppo di sostituzioni lineari intere

$$x' = ax + b \ ,$$

nel terzo al gruppo generale projettivo

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \ .$$

§ 124
Gruppo lineare omogeneo G_4 su due variabili

Alla determinazione di tutti i possibili gruppi finiti su due variabili (del piano) è necessario premettere uno studio sul gruppo G_4 di sostituzioni lineari omogenee su due variabili

$$(4) \quad \begin{cases} x_1' = a_1 x + a_2 y \\ y_1' = a_3 x + a_4 y \end{cases}$$

e sui suoi sottogruppi – In primo luogo osservando che l'identità corrisponde ai valori $a_1 = a_4 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ dei parametri, calcoliamo subito la più generale trasformazione infinitesima del gruppo ponendo

$$(5) \quad a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t \,,\; a_2 = \alpha_2 \delta t \,,\; a_3 = \alpha_3 \delta t \,.\; a_4 = 1 + \alpha_4 \delta t$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ costanti arbitrarie, il che dà

$$\delta x = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\,\delta t$$
$$\delta y = (\alpha_3 x + \alpha_4 y)\ \ldots$$

onde

$$(6) \quad Xf = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\frac{\partial f}{\partial x} + (\alpha_3 x + \alpha_4 y)\frac{\partial f}{\partial y} = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)p + {}$$
$$+ (\alpha_3 x + \alpha_4 y)q \text{ (*)} -$$

Le quattro trasformazioni generatrici del gruppo

(*) D'ora innanzi adotteremo per brevità le notazioni $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$ -

sono dunque

$$xp\ ,\ yp\ ,\ xq\ ,\ yq$$

Calcolando il gruppo derivato (§ 62) vediamo subito che esso è un G_3 generato dalle tre trasformazioni

$$(7)\qquad xq\ ,\ xp - yq\ ,\ yp$$

Dunque il nostro G_4 possiede per primo gruppo derivato questo G_3, che è quindi invariante in G_4. — Come sono caratterizzate fra le (4) le trasformazioni di questo G_3? — Diciamo da questo che nelle sostituzioni di G_3 il determinante $\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3$ è eguale all'unità. — Ponendo infatti la condizione

$$\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1\,,$$

nella (5) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ non sono più arbitrarie ma legate dalla condizione $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$, ciò che riduce appunto la (6) ad una combinazione lineare delle (7). — Il gruppo G_3 dato dalle (4) quando $\Delta = 1$ dicesi il gruppo lineare omogeneo speciale, e la condizione $\Delta = 1$ rende già evidente che esso è invariante in G_4. — Dunque intanto: Il gruppo derivato del gruppo lineare omogeneo G_4 è il sottogruppo lineare speciale G_3.

Per le sostituzioni generatrici di G_3 prendiamo

$$(8)\qquad X_1 f = xq\ ,\ X_2 f = xp - yq\ ,\ X_3 f = yp$$

alle quali basterà aggiungere la quarta

$$(8^*)\qquad X_4 f = xp + yq$$

per avere tutte le trasformazioni infinitesime di G_4

Osserviamo intanto le formole di composizione

(9) $(X_1X_2) = -2X_1f$, $(X_1X_3) = X_2f$, $(X_2X_3) = -2X_3f$

$$(X_1X_4) = (X_2X_4) = (X_3X_4) = 0;$$

queste ci dicono che la trasformazione infinitesima X_4f è eccezionale cioè le trasformazioni del corrispondente G_1 sono permutabili colle singole di G_4, il che risulta anche evidente dalle formole finite di questo G_1

$$x' = (1+t)x \quad , \quad y' = (1+t)y$$

Le (9) dimostrano anche subito che la X_4f è l'unica trasformazione eccezionale in G_4, cioè il sottogruppo commutativo di G_4 è il G_1 sopra detto. - Scrivendo le trasformazioni generatrici di G_4 sotto la forma (8)(8*) mettiamo così in evidenza i due sottogruppi invarianti G_3, G_1, i quali sono, come ora si vedrà, gli unici sottogruppi invarianti in G_4.

Osserviamo ancora che considerando il G_3 come operante nel rapporto delle variabili si ha

$$\frac{x'_1}{y'_2} = \frac{a_1\frac{x}{y} + a_2}{a_3\frac{x}{y} + a_4} \; ;$$

e risulta evidente che esso è oloedricamente isomorfo col gruppo projettivo sopra una variabile.

Per la ricerca dei varii tipi di sottogruppi in G_4 ci serviremo (secondo i risultati dei §§ 72, 73) del gruppo aggiunto. - Calcoliamone intanto

colle formole (f) § 69 le trasformazioni infinitesime, osservando la composizione (9) del G_4 attuale e troveremo:

$$(10)\quad E_1 f = 2e_2\frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3\frac{\partial f}{\partial e_2}\ ,\quad E_2 f = -2e_1\frac{\partial f}{\partial e_1} + 2e_3\frac{\partial f}{\partial e_3}$$

$$E_3 f = e_1\frac{\partial f}{\partial e_2} - 2e_2\frac{\partial f}{\partial e_3}\ ,\quad E_4 f = 0$$

Come si vede, questo gruppo aggiunto è un Γ_3, ciò che era prevedibile avendo il G_4 per sottogruppo commutativo il $G_1 = X_4 f$.

§ 125
Sottogruppi invarianti e sottogruppi G_1 di G_4

Per trovare i varii tipi di sottogruppi del G_4 (*) applicheremo ora le regole generali stabilite al § 73, riguardando $e_1 : e_2 : e_3 : e_4$ come coordinate omogenee nell'S_3. In primo luogo dovremo determinare le varietà minime invarianti rispetto al gruppo aggiunto Γ_3 in questo spazio. Dovremo perciò (cf. § 73) aggregare alle generatrici

(*) Come al paragrafo 72 diciamo appartenere ad uno stesso tipo due sottogruppi di un gruppo quando sono affini nel gruppo.

$$E_1 f,\ E_2 f,\ E_3 f$$

di Γ_3' la

$$E_4' f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} + e_4 \frac{\partial f}{\partial e_4}$$

e studiare, nel modo ordinario, le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$\Gamma_4 \equiv (E_1 f, E_2 f, E_3 f, E_4 f)$$

Il determinante

$$\begin{vmatrix} 2e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & e_1 & -2e_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

è di caratteristica $= 3$, onde Γ_4' è intransitivo. Esso possiede un solo invariante, pel quale può prendersi

$$J = \frac{e_2^2 + e_1 e_3}{e_4^2};$$

le varietà minime invarianti corrispondenti sono le quadriche del fascio

(11) $$\lambda(e_2^2 + e_1 e_3) + \mu e_4^2 = 0,$$

dove sono da considerarsi a parte i casi limiti $\lambda = 1$ $\mu = 0$, $\lambda = 0$ $\mu = 1$, che danno il cono

(12) $$e_2^2 + e_1 e_3 = 0,$$

ed il piano doppio

(13) $$e_4^2 = 0$$

Le altre varietà invarianti si ottengono, come sappiamo, eguagliando a zero i minori dello stesso ordine del detto determinante.

I determinanti del 3° ordine danno la varietà

invariante

(14) $$e_2^2 + e_1 e_3 = 0 \ , \ e_4 = 0,$$

che è la conica d'intersezione del cono (12) col piano invariante $e_4 = 0$ –

Gli altri minori danno, come unica varietà invariante, il punto $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, cioè il vertice del cono che corrisponde alla trasformazione infinitesima eccezionale $X_4 f$ di G_4 –

Fra le varietà invarianti trovate ne figurano due sole lineari, il piano $e_4 = 0$ ed il punto $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, che corrispondono rispettivamente al gruppo derivato G_3 ed al sottogruppo commutativo G_1. Per quanto si è visto al § 73 possiamo concluderne intanto: Gli unici sottogruppi invarianti di G_4 sono il sottogruppo G_3 derivato (gruppo lineare speciale) ed il sottogruppo commutativo G_1, come sopra avevamo enunciato –

Volendo ora enumerare tutti i possibili tipi di sottogruppi ad un parametro di G_4 basterà scegliere sopra ciascuna della varietà invarianti un punto ad arbitrio come rappresentante del tipo, purché non cada sopra una varietà invariante minore –

Scegliamo: 1° il punto invariante $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, cui corrisponde la trasformazione infinitesima eccezionale $xp + yq$ –

2° il punto (1, 0, 0, 1) sul cono (12), colla trasforma

zione corrispondente $xq + xp + yq$.

3° il punto $(1, 0, 0, 0)$ sulla conica (14), cui corrisponde xq.

4° il punto $(0, \frac{1}{2}, 0, c + \frac{1}{2})$ sulla quadrica (11) corrispondente al valore $\frac{\lambda}{\mu} = -(2c+1)^2$, con c costante essenziale, differente però da $-\frac{1}{2}$, altrimenti saremmo nel piano $e_4 = 0$.

5° il punto $(0, 1, 0, 0)$ sul piano $e_4 = 0$, che corrisponde a fare $c = -\frac{1}{2}$ nel caso precedente.

Così i due ultimi casi si riuniscono in un solo tipo, dipendente da una costante arbitraria c; quindi damo in realtà ∞^1 tipi distinti rappresentati dalla trasformazione infinitesima

$$(c + \tfrac{1}{2}) X_4 f - \tfrac{1}{2} X_2 f = c\,xp + (c+1)\,yq$$

Riepilogando abbiamo in G_4 i quattro tipi di sottogruppi ad un parametro

$$\boxed{xp + yq}\ ,\quad \boxed{xq + (xp + yq)}\ ,\quad \boxed{xq}\ ,\quad \boxed{c\,xp + (c+1)\,yq}$$

l'ultimo dei quali contiene ∞^1 tipi distinti corrispondenti ai valori della costante essenziale c. Ogni altro sottogruppo ad un parametro è affine in G_4 ad uno di questi.

§ 126
Sottogruppi G_2 a due parametri di G_4

Per classificare i sottogruppi a due parametri di G_4, cominciamo dal ricercare quelli Abeliani, le cui due trasformazioni infinitesime

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 X_4 f$$

$$\bar{X}f = \bar{e}_1 X_1 f + \bar{e}_2 X_2 f + \bar{e}_3 X_3 f + \bar{e}_4 X_4 f$$

sono permutabili, cioè danno

$$(X, \bar{X}) = 0$$

Per le formole di composizione (9) si ha

$$(15)\quad (X, \bar{X}) = 2(\bar{e}_1 e_2 - \bar{e}_2 e_1) X_1 f + (e_1 \bar{e}_3 - e_3 \bar{e}_1) X_2 f + + 2(\bar{e}_2 e_3 - \bar{e}_3 e_2) X_3 f,$$

onde Xf, $\bar{X}f$ saranno permutabili quando sia

$$e_1 : e_2 : e_3 = \bar{e}_1 : \bar{e}_2 : \bar{e}_3$$

Osservando l'immagine geometrica in S_3^{γ}, si ha:
Due trasformazioni infinitesime di G_4 sono permutabili solo quando i loro punti immagine in S_3 sono allineati coll'origine $(0, 0, 0, 1)$ vertice del cono

Ne risulta che i sottogruppi Abeliani G_2 di G_4 sono rappresentati da tutte e sole le rette per l'origine – Osservando poi che sui punti del piano (invariante) $e_4 = 0$ il gruppo aggiunto Γ_3 agisce transi-

tivamente, salvo che per i punti della conica (14), che si scambiano transitivamente sulla conica stessa, si conclude che questi G_2 Abeliani si distinguono in due tipi rappresentati il primo da una generatrice qualunque del cono, il secondo da un'altra retta qualunque per l'origine - Come rappresentanti di questi due tipi possono prendersi p.e. i due

$$\boxed{xq,\ xp+yq} \quad , \quad \boxed{xp-yq,\ xp+yq}$$

Rimangono a trovare i sottogruppi G_2 non Abeliani di G_4 e classificarli in tipi.

Se $(X, \bar{X})$ è un tale sottogruppo, i due punti immagine $e_1 : e_2 : e_3 : e_4$, $\bar{e}_1 : \bar{e}_2 : \bar{e}_3 : \bar{e}_4$ delle trasformazioni generatrici Xf, $\bar{X}f$ non sono in linea retta coll'origine e quindi le loro proiezioni dall'origine sul piano invariante $e_4 = 0$, cioè i due punti

$$(16) \quad (e_1\, e_2\, e_3\, 0) \ , \ (\bar{e}_1\, \bar{e}_2\, \bar{e}_3\, 0)$$

sono distinti - La formola (15) dimostra che il punto immagine di $(X, \bar{X})$ trovasi sul piano $e_4 = 0$ ed è precisamente il polo della congiungente i due punti (16) rispetto alla conica (14) (cf. § 75) - Poichè le Xf, $\bar{X}f$ generino effettivamente un G_2 è necessario e sufficiente che $(X, \bar{X})$ sia una combinazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, di Xf, $\bar{X}f$, che cioè il punto immagine di $(X, \bar{X})$ sia sulla retta che congiunge i punti immagine di Xf, $\bar{X}f$,

§ 127
Sottogruppi G_3 di G_4 e riepilogo

Per terminare colla classificazione di tutti i tipi di sottogruppi in G_4 altro non ci resta che esaminare i sottogruppi G_3 a tre parametri. Un tale sottogruppo è rappresentato in ogni caso da un piano, il quale può coincidere col piano $e_4=0$ od esserne distinto. Nel primo caso esso rappresenta precisamente il G_3 derivato

$$xq, \; xp-yq, \; yp$$

cioè il gruppo lineare speciale. Se il piano π immagine di un sottogruppo G'_3 è distinto dal piano $e_4=0$, taglia questo piano secondo una retta che è immagine di ∞^2 trasformazioni comuni ai due sottogruppi G_3, G'_3 cioè di un sottogruppo G_2; la detta retta è dunque tangente alla conica (44). Se prendiamo poi un qualunque sottogruppo $(X, \bar{X})$ a due parametri di G_3, o i punti immagini di Xf, $\bar{X}f$ sono allineati col vertice del cono, o si projettano sul piano $e_4=0$ in due punti distinti della tangente considerata (v. sopra); in tutti i casi dunque il piano π deve contenere una tangente della conica e passare pel vertice del cono, cioè π deve essere un piano tangente del cono. Viceversa

ogni tale piano è immagine di un G'_3 di G_4 - Siccome tutti i piani tangenti al cono sono equivalenti rispetto al gruppo aggiunto questi G'_3 formano un unico tipo rappresentato p. e. dal piano

$$e_3 = 0$$

ciò che dà il sottogruppo

$$\boxed{xq\,,\ xp-yq\,,\ xp+yq}$$

Riepiloghiamo la nostra discussione nel seguente teorema:

I sottogruppi del gruppo lineare omogeneo

$$G_4 \equiv (xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq)$$

sono affini nel gruppo ai seguenti sottogruppi:

1º I sottogruppi G_3 a tre parametri o al gruppo lineare speciale (gruppo derivato - invariante),

$$\boxed{xq\,,\ xp-yq\,,\ yp}$$

o all'altro

$$\boxed{xq\,,\ xp-yq\,,\ xp+yq}$$

2º Ogni sottogruppo G_2 trova il suo affine o fra i due

$$\boxed{xq\,,\ xp+yq} \qquad \boxed{xp-yq\,,\ xp+yq} \quad \Big\}\ \text{Abeliani}$$

o fra gli altri ∞¹ rappresentati da

$$\boxed{xq\,,\ xp-yq+c(xp+yq)}$$

con c costante essenziale

3º Un sottogruppo G_1 è affine ad uno dei quattro seguenti

$$\boxed{xq + xp + yq} \qquad \boxed{xq} \qquad \boxed{cxp + (c+1)\,yq}$$

$$\boxed{xp + yq}$$

ove il terzo, che contiene la costante c essenziale, rappresenta ∞^1 tipi distinti.

È importante osservare (per l'applicazione al problema principale che abbiamo in vista nel presente capitolo) che i raggi del fascio col centro nell'origine $x=0$, $y=0$ nel piano xy vengono trasformati da G_4 e dai suoi sottogruppi secondo il gruppo projettivo sopra una variabile (parametro del fascio) od uno suo sottogruppo. Ma fra questi soltanto il G_4 stesso ed il suo sottogruppo derivato (gruppo lineare speciale G_3) trasformano il fascio per l'origine secondo il gruppo generale projettivo.

§. 128

Criterio per distinguere i gruppi primitivi su due variabili dagli imprimitivi

---

Nella risoluzione del problema che ci siamo proposti di costruire tutti i possibili tipi di gruppi del piano, conviene separare la determinazione dei gruppi primitivi da quella degli imprimitivi.

I primi si determinano, come si vedrà, con considerazioni sugli ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici analoghe a quelle che ai §§ 122, 123 ci hanno condotto alla risoluzione del problema più semplice pel caso di una sola variabile; pei gruppi imprimitivi invece occorrono considerazioni speciali che svolgeremo più avanti.

Ai §§ 51, 52 abbiamo già parlato della imprimitività dei gruppi in generale e stabiliti dei criterii relativi, dipendenti dagli eventuali sistemi completi che ammettono il gruppo. Vogliamo ora, nel caso speciale dei gruppi su due variabili, spingere molto più avanti questa ricerca e trovare dei criterii che, alla semplice ispezione delle trasformazioni infinitesime del gruppo, permettono di riconoscere se il gruppo è primitivo o imprimitivo.

Consideriamo un gruppo G_r qualunque nel piano (x, y) ed il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 del piano che sarà un G_{r-2} ovvero un G_{r-1} secondo che il gruppo G_r è transitivo o intransitivo (*). Il fascio degli elementi lineari uscenti da P_0 viene trasformato dal sottogruppo di stabilità secondo un gruppo projettivo, ciò può

(*) Si ricordi che qui si ha o $r_0 = 2$ (gruppi transitivi) o $r_0 = 1$ (gruppi intransitivi)

essere il gruppo generato a tre parametri, ovvero un suo sottogruppo che può anche ridursi all' identità.

Dimostriamo che nel primo caso il gruppo G_r sarà primitivo, nel secondo imprimitivo.

E infatti se G_r è imprimitivo, vi è almeno una divisione del piano in curve d' imprimitività. Il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 lascia fissa quella curva γ d'imprimitività che esce da P_0 e perciò anche l' elemento lineare in P_0 di essa curva. In tal caso adunque gli elementi lineari uscenti da P_0 non possono essere trasformati dal gruppo generale projettivo perchè non vi sarebbe allora alcun elemento fisso per tutte quelle trasformazioni. Se ne conchiude appunto che se il sottogruppo di stabilità di un punto generico P_0 agisce sugli elementi lineari per P_0 secondo il gruppo generale projettivo, il G_r è certamente primitivo.

Ma supponiamo ora al contrario che il detto sottogruppo di stabilità di P_0 agisca sugli elementi lineari per P_0 secondo un gruppo (projettivo) ad uno o a due parametri soltanto. Per ogni punto P_0 avremo allora uno o due elementi lineari speciali che rimarranno invariati per tutte le trasformazioni del sottogruppo di stabilità (cf. § 75). Esisterà quin

di uno, ovvero esisteranno due sistemi ∞^1 di curve piane, i cui elementi lineari per ogni punto P_0 coincideranno con quegli elementi lineari fissi - D'altra parte ogni trasformazione di G_r che porti P_0 in un punto Q_0 trasforma il sottogruppo di stabilità di P_0 in quello di Q_0 e quindi gli elementi lineari fissi per P_0 in quelli per Q_0 - Risulta da ciò che per qualunque trasformazione di G_r una curva γ del sistema ∞^1 sopra considerato (o di uno dei due sistemi) si cangia in un'altra curva del sistema stesso - Quel sistema ∞^1 di curve è adunque un sistema d'imprimitività: il gruppo è imprimitivo, c. d. d.

Nel caso infine che il sottogruppo di stabilità lasci fissi tutti gli elementi lineari per P_0, si vede subito che esistono ∞^1 sistemi di curve d'imprimitività se il gruppo è transitivo, ed invece ∞^∞ se è intransitivo -

Così adunque riassumendo abbiamo:

Un gruppo G_r del piano è primitivo od imprimitivo secondo che dal sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 gli elementi lineari del fascio uscenti da P_0 vengono trasformati dal gruppo generale projettivo a tre parametri, ovvero da un suo sottogruppo -

Ora abbiamo un mezzo molto semplice, date le trasformazioni infinitesime generatrici di G_r, per decidere se ha luogo l'uno o l'altro caso -

Per questo basterà, secondo quanto si è visto al § 114, calcolare i termini di primo grado degli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore, ciò che darà secondo le formole (16) o (17) del citato § 114 le trasformazioni infinitesime $L_k F$ del gruppo lineare omogeneo sulle coordinate omogenee $x^{(1)}, y^{(1)}$ dell'elemento lineare per P_0. Per l'osservazione alla fine del paragrafo precedente, se questo gruppo sarà il gruppo lineare omogeneo totale G_4, ovvero il gruppo lineare speciale G_3, il gruppo G_r sarà primitivo, altrimenti imprimitivo.

Si conclude intanto di qui che per un gruppo primitivo su due variabili i numeri caratteristici (generici) τ o la distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime possono offrire pei due primi τ_0, τ_1 solo i due casi seguenti

a) $\tau_0 = 2 \quad , \quad \tau_1 = 4$

b) $\tau_0 = 2 \quad , \quad \tau_1 = 3$

Nel caso a) il gruppo è certamente primitivo; nel caso b) solo quando non figuri nel gruppo lineare omogeneo G_3 la trasformazione infinitesima eccezionale

$$x^{(1)}p^{(1)} + y^{(1)}q^{(1)}$$

In ogni caso si vede che per decidere della primitività od imprimitività dei gruppi a due variabili basta il calcolo dei termini di grado zero ed uno negli sviluppi in serie delle sue trasformazioni infi-

nitesime. In particolare basta la conoscenza delle equazioni di definizione del gruppo.

§ 129

Ordine massimo delle trasformazioni infinitesime di un gruppo primitivo

Servendoci dei risultati ora ottenuti, andiamo a cercare la forma dei primi termini degli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime di un gruppo G_r a due variabili, supposto primitivo. Per semplicità supporremo che l'origine $x=0$, $y=0$ sia un punto generico, dove cioè i numeri r conservano i loro valori generici, e svilupperemo quindi in serie di potenze di x, y.

Avremo in primo luogo $r_0 = 2$ trasformazioni d'ordine zero, alle quali sostituendo due loro convenienti combinazioni lineari, potremo dare la forma

$$\begin{cases} X_1 f = p + \dots \\ X_2 f = q + \dots \end{cases}$$

Prendiamo ora una delle $r_0 = 4$, o delle $r_0 = 3$, trasformazioni del 1° ordine e sia

$$\mathfrak{X}f = (\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q + \dots$$

La corrispondente trasformazione lineare omogenea LF sulle coordinate (omogenee) $x^{(1)}, y^{(1)}$ degli elemen-

ti lineari per l'origine è data (§ 114) da

$$IF = (\alpha x^{(1)} + \beta y^{(1)}) p^{(1)} + (\gamma x^{(1)} + \delta y^{(1)}) q^{(1)}$$

e siccome nel gruppo delle I debbono figurare o le quattro

$$x^{(1)} q^{(1)}, \quad x^{(1)} p^{(1)} - y^{(1)} q^{(1)}, \quad y^{(1)} p^{(1)}, \quad x^{(1)} p^{(1)} + y^{(1)} q^{(1)}$$

generatrici del gruppo omogeneo totale G_4 o le tre prime generatrici del gruppo lineare speciale, a seconda che avrà luogo il caso a) o b) del paragrafo precedente potremo supporre nel G_r o le 6 trasformazioni

$$I) \begin{cases} X_1 f = p + \cdots, X_2 f = q + \cdots, X_3 f = xq + \cdots, X_4 f = xp - yq + \cdots \\ X_5 f = yp + \cdots, X_6 f = xp + yq + \cdots \end{cases}$$

con trasformazioni d'ordine superiore al primo o le 5

$$II) \quad X_1 f = p + \cdots, X_2 f = q + \cdots, X_3 f = xq + \cdots, X_4 f = xp - yq + \cdots$$
$$X_5 f = yp + \cdots$$

con altre trasformazioni d'ordine superiore al primo

Cominciamo dal dimostrare che in ambedue i casi le altre trasformazioni infinitesime del gruppo d'ordine superiore al primo, se pure esistono, saranno precisamente d'ordine $s = 2$. Sia $\mathfrak{X}f$ una trasformazione infinitesima d'ordine massimo s nel gruppo, poniamo

$$(17) \qquad \mathfrak{X}f = \xi_s p + \eta_s q + \cdots$$

dove ξ_s, η_s sono forme di grado s in x, y, non am-

bedue nulle - Poniamo p. e. che sia $\xi_s \neq 0$ (ciò che può farsi potendoli, nel caso $\xi_s = 0$, scambiare x con y); e dimostriamo da prima che vi sarà pure in G_r una trasformazione infinitesima dello stesso ordine s, ove la ξ_s non nulla non conterrà la y, cioè si ridurrà alla potenza x^s - Supposto che nella (47) la ξ_s contenga la y col grado massimo $k > 0$, avremo in G_r anche la

$$(X_s X) = x\frac{\partial \xi_s}{\partial y}p + \left(x\frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \xi_s\right)q + \cdots$$

che è di ordine s ma nella quale il nuovo $\xi_s = x\frac{\partial \xi_s}{\partial y}$ contiene la y al massimo grado $k-1$ senza esser nullo.

Ripetendo successivamente l'operazione, faremo sparire la y da ξ_s onde avremo in G_r una trasformazione infinitesima della forma

$$Yf = x^s p + \eta_s q + \cdots$$

Esisterà quindi in G_r anche la

$$Y_1 f = (X, Y) = s x^{s-1} p + \eta_{s-1} q + \cdots$$

d'ordine $s-1$ e quindi anche la

$$(Y Y_1) = -s x^{2s-2} p + \eta_{2s-2}\, q + \cdots$$

che, senza esser nulla, è d'ordine $2s-2$ - Dunque poichè s è l'ordine massimo, sarà $2s-2 \leq s$, cioè $s \leq 2$ c. d. d.

Concludiamo: Un gruppo primitivo su due variabili non ammette, per un punto generico del piano, trasformazioni infinitesime d'ordine superiore al secondo.

§ 130

Numero dei parametri di un gruppo primitivo nel piano

Proseguendo la ricerca superiore, andiamo ora a cercare se e quali trasformazioni di 2° ordine possono essere contenute nel gruppo e per prima cosa proviamo che ciò può accadere solo nel caso I), mentre nel caso II) questo non è certamente, e quindi in questo ultimo caso il gruppo ha 5 soli parametri.

Poniamo infatti che esista nel caso II) una trasformazione di 2° ordine: per ciò che si è visto al paragrafo precedente ne esisterà anche una della forma

$$(18) \qquad Vf = x^2p + (ax^2 + bxy + cy^2)q + \cdots$$

che combinata con $X_1f = p + \cdots$, $X_2f = q + \cdots$ dà le trasformazioni del 1° ordine

$$(X_1V) = 2xp + (2ax + by)q + \cdots$$

$$(X_2V) = (bx + 2cy)q + \cdots$$

ed anche combinando linearmente con X_3f, X_4f le due

$$(b+2)yq + \cdots$$

$$cyq + \cdots$$

che segue $b = 2$, $c = 0$; altrimenti avremmo nel gruppo la

$$yq+\cdots\cdots$$

e però anche

$$xp-yq+\cdots+2(yq+\cdots)=xp+yq+\cdots$$

e saremmo nel caso II). Dunque

$$Vf=x^2p+(ax^2-2xy)q+\cdots$$

che, combinata con $X_3f=xq+\cdots$, dà

$$(X_3V)=-3x^2q+\cdots$$

Avremmo dunque nel gruppo anche

$$V_1f=x^2q+\cdots$$

e quindi

$$(VV_1)=4x^3q+\cdots$$

che sarebbe del 3° ordine - Dunque solo nel caso I) può entrare nel gruppo una trasformazione di 2° ordine - Ora vogliamo vedere quante possono entrarne di 2° ordine e di che forma - Supposto che ve ne sia qualcuna, ve ne sarà anche una Vf della forma (18) - Combinandola con $Zf=xp=\frac{1}{2}(X_4f+X_6f)$ che è nel gruppo I), vi sarà anche

$$(ZV)=x^2p+(2ax^2+bxy)q+\cdots$$

quindi anche, sottraendovi V, la

$$\overline{V}f=(ax^2-cy^2)q+\cdots,$$

che combinata alla sua volta con Zf dà

$$(Z\overline{V})=2ax^2q+\cdots$$

Esistono dunque nel gruppo le due

$$ax^2q+\cdots\cdots$$

$$cy^2q+\cdots\cdots$$

e quindi sottraendo da V la

$$V_1 f = x^2 p + bxyq + \cdots$$

Combinando $V_1 f$ con $X_3 f = xq + \cdots$ si ha nel gruppo

$$V_2 f = (V_1 X_3) = (1-b) x^2 q + \cdots$$

e quindi anche:

$$(V_1 V_2) = (b^2 - 3b + 2) x^3 q \cdots$$

che è del 3° ordine se $b^2 - 3b + 2 = 0$, dunque o $b=1$ o $b=2$.

Il secondo caso si esclude subito perchè si avrebbe in G_2 la

$$-V_2' f = x^2 q + \cdots$$

e però anche

$$(X_6, V_2) = (yp + \cdots, -x^2 q + \cdots) = x^2 p - 2xyq + \cdots$$

che corrisponderebbe nella $V_1 f$ al valore inammissibile $b = -2$.

Dunque abbiamo in G_2 la

(19) $$V_1 f = x^2 p + xyq + \cdots$$

e però anche

(19*) $$\overline{V}_1 f = (X_6, V_1) = xyp + y^2 q + \cdots$$

Diciamo ora che non possono esistere in G_2 altre trasformazioni di 2° ordine, oltre le due (19), (19*). Se ne esistesse un'altra, combinandola linearmente con $V_1 f$, $\overline{V}_1 f$ si potrebbe ridurre alla forma:

$$Uf = Ay^2 p + (Bx^2 + Cxy + Dy^2) q + \cdots \quad (A, B, C, D \text{ costanti})$$

Le trasformazioni alternate

$$(V_1 U), (\overline{V}_1 U)$$

sarebbero del 3° ordine, se non fossero identicamente

nulle - Scrivendo la condizione

$$(V, U) = 0,$$

si vede subito che i termini di 3° grado nel coefficiente di q sarebbero

$$- Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 - Ay^3,$$

onde si conclude $A = B = C = D = 0$, e la Uf supposta non esiste -

Raccogliendo i risultati fin qui ottenuti, abbiamo:

Un gruppo primitivo nel piano non può avere che 8, 6 o 5 parametri e le corrispondenti trasformazioni infinitesime, distribuite a seconda dei loro ordini, possono offrire i tre casi seguenti:

$$G_8\ A)\begin{cases} X_1f = p + \cdots, X_2f = q + \cdots, X_3f = xq + \cdots, X_4f = xp - yq + \cdots \\ X_5f = yp + \cdots, X_6f = xp + yq + \cdots, X_7f = x^2p + xyq + \cdots, \\ X_8f = xyp + y^2q + \cdots \end{cases}$$

$$G_6\ B)\begin{cases} X_1f = p + \cdots, X_2f = q + \cdots, X_3f = xq + \cdots, X_4f = xp - yq + \cdots, \\ X_5f = yp + \cdots, X_6f = xp + yq + \cdots \end{cases}$$

$$G_5\ C)\begin{cases} X_1f = p + \cdots, X_2f = q + \cdots, X_3f = xq + \cdots, \\ X_4f = xp - yq + \cdots, X_5f = yp + \cdots \end{cases}$$

Osserviamo subito che l'esistenza di effettivi gruppi primitivi dei tre tipi è fuori di dubbio; perchè se si riduce ciascuna Xf alla $\bar{X}f$ che si ottiene serbando di

Xf ogni volta i termini di grado minimo, queste $\bar{X}f$ soddisfano alle condizioni del teorema principale

$$(\bar{X}_i \bar{X}_k) = \sum_s c_{iks} \bar{X}_s$$

e generano quindi un effettivo gruppo - Dimostreremo che i tre gruppi $\bar{G}_8$, $\bar{G}_6$, $\bar{G}_5$ così ottenuti sono gruppi proiettivi e che ogni gruppo primitivo del piano è simile ad uno di questi.

§ 131
Riduzione dei gruppi primitivi a forma normale nel caso A)

Abbiamo scelto le trasformazioni infinitesime dei gruppi primitivi da determinarsi, in guisa che offrano nei loro termini di grado più basso i casi A) o B) o C). Ma in questa scelta resta ancora molta indeterminazione potendosi evidentemente, senza nulla alterare, aggiungere a ciascuna Xf una combinazione lineare omogenea delle trasformazioni di grado superiore a quello di Xf - Ora dimostreremo che si possono modificare nel detto modo le Xf in guisa che le costanti di composizione per le X_if siano le stesse che per le trasformazioni associate $\bar{X}_if$ - Con ciò resterà provato che ogni volta il gruppo G si può porre in relazione d'isomorfismo oloedrico col corrispondente

gruppo associato $\bar{G}$, p.e. il gruppo G_8 col gruppo

$$\bar{G}_8 = (p, q, xp-yq, yp, xp+yq, x^2p+xyq, xyp+y^2q),$$

il quale non è altro che il gruppo generale projettivo del piano (§ 133) - In ogni caso siccome G, $\bar{G}$ come gruppi primitivi sono certo asistatici (§ 54), essendo oloedricamente isomorfi saranno simili (§ 87) - Per tal modo risulterà che i gruppi primitivi del piano si riducono a tre soli tipi (projettivi) $\bar{G}_8$, $\bar{G}_6$, $\bar{G}_5$.

A) Cominciamo le operazioni indicate dal caso A), cercando di costruire le trasformazioni alternate $(X_i X_k)$.

In primo luogo osserviamo che formando queste espressioni alternate per le due di secondo ordine X_7f, X_8f combinate fra loro e con quelle di 1° ordine X_3f, X_4f, X_5f, X_6f la trasformazione risultante è almeno di 2° ordine (o nulla) - Le trasformazioni di 1° ordine essendo nel gruppo perfettamente fissate, ne segue che per queste prime espressioni alternate le costanti di composizione sono già le medesime che per le trasformazioni associate $\bar{X}f$ - Si ha quindi:

$$(20)\begin{cases}(X_3X_7)=0, & (X_3X_8)=X_7, & (X_4X_7)=X_7, & (X_4X_8)=-X_8 \\ (X_5X_7)=X_8, & (X_5X_8)=0, & (X_6X_7)=X_7, & (X_6X_8)=X_8 .\end{cases}$$

Combiniamo ora le trasformazioni di 1° ordine fra loro - Per le trasformazioni associate si ha:

$$(21)\begin{cases}(\bar{X}_3\bar{X}_4)=-2\bar{X}_3, & (\bar{X}_3\bar{X}_5)=\bar{X}_4, & (\bar{X}_3\bar{X}_6)=0, & (\bar{X}_4\bar{X}_5)=-2\bar{X}_5 \\ (\bar{X}_4\bar{X}_6)=0, & (\bar{X}_5\bar{X}_6)=0 .\end{cases}$$

quindi per le effettive X_f valgono le medesime espressioni a meno di una combinazione lineare omogenea di X_7, X_8 nei secondi membri. Così avremo

$$(X_3 X_6) = a X_7 + b X_8 ,$$

e guardando alla (20)

$$(X_3 + a X_7 + b X_8 , X_6) = 0$$

per cui prendendo $X_3 + a X_7 + b X_8$ in luogo di X_3 sarà $(X_3 X_6) = 0$ - Lo stesso vale evidentemente per X_4, X_5 combinate con X_6, onde potremo supporre X_3, X_4, X_5 già scelte in guisa da avere

(22) $(X_3 X_6) = 0, \quad (X_4 X_6) = 0, \quad (X_5 X_6) = 0$

Osservando la prima delle (21) si avrà

$$(X_3 X_4) = -2X_3 + \alpha X_7 + \beta X_8$$

e dall'identità Jacobiana

$$((X_3 X_4), X_6) + ((X_4 X_6), X_3) + ((X_6 X_3), X_4) = 0$$

per le (22)

$$(-2X_3 + \alpha X_7 + \beta X_8 , X_6) = \alpha (X_7 , X_6) + \beta (X_8 , X_6) =$$

$$= -\alpha X_7 - \beta X_8 = 0$$

da cui $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e però

$$(X_3 X_4) = -2X_3$$

e similmente

$$(X_3 X_5) = X_4 , \quad (X_4 X_5) = -2X_5$$

Valgono così tutte le (21) anche per le trasformazioni effettive X_f -

Passiamo ora alle combinazioni delle due trasformazioni X_1, X_2 d'ordine zero con tutte le altre - Per le ze-

enciato si ha:

$$(23)\begin{cases}(\bar X_1\bar X_2)=0,\ (\bar X_1\bar X_3)=\bar X_2,\ (\bar X_1\bar X_4)=\bar X_1,\ (\bar X_1\bar X_5)=0,\ (\bar X_1\bar X_6)=\bar X_1,\\ (\bar X_1\bar X_7)=\frac{1}{2}\bar X_4+\frac{3}{2}\bar X_6,\ (\bar X_1\bar X_8)=\bar X_5,\ (\bar X_2\bar X_3)=0,\ (\bar X_2\bar X_4)=-\bar X_2,\\ (\bar X_2\bar X_5)=\bar X_1,\ (\bar X_2\bar X_6)=\bar X_2,\ (\bar X_2\bar X_7)=\bar X_3,\ (\bar X_2\bar X_8)=\frac{3}{2}\bar X_4+\frac{1}{2}\bar X_6,\end{cases}$$

e cerchiamo di modificare X_1, X_2 in guisa che anche per le X_f abbiano luogo le stesse formole di composizione.

Osserviamo prima che si ha

$$(X_1X_6)=X_1+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5+a_6X_6+a_7X_7+a_8X_8,$$

essendo le $\underline{a}$ costanti, e sostituendo ad X_1 la

$$X_1'=X_1+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5+a_6X_6+\frac{1}{2}a_7X_7+\frac{1}{2}a_8X_8$$

verrà

$$(X_1'X_6)=0$$

e tornando ad indicare X_1' con X_1 e modificando analogamente X_2, avremo

$$(X_1X_6)=X_1\quad,\quad(X_2X_6)=X_2.$$

Dopo ciò, servendosi della identità Jacobiana, è facile vedere che anche le altre formole di composizione per le X saranno le stesse che per le $\bar X$ nelle (23) - Così per (X_1X_7) avremo

$$(X_1X_7)=\frac{1}{2}X_4+\frac{3}{2}X_6+aX_7+bX_8$$

e scrivendo l'identità Jacobiana con X_6:

$$((X_1X_7),X_6)+((X_7X_6),X_1)+((X_6X_1),X_7)=$$

$$=a(X_7X_6)+b(X_8X_6)-(X_7X_1)-(X_1X_7)=$$

$$=-aX_7-bX_8=0$$

si ha $a=0$, $b=0$; dunque

$$(X_1 X_7) = \frac{1}{2} X_4 + \frac{3}{2} X_6$$

Lo stesso si vede subito per $(X_1 X_8)$, $(X_2 X_7)$, $(X_2 X_8)$ che si esprimono come nelle (23) –

Analogamente accade di tutti gli altri simboli $(X_i X_k)$. Così p. e. si può porre

$$(X_1 X_4) = X_1 + aX_3 + bX_4 + cX_5 + dX_6 + eX_7 + fX_8$$

e dall' identità

$$((X_1 X_4), X_6) + ((X_4 X_6), X_1) + ((X_6 X_1), X_4) = 0$$

risulta subito

$$a = b = c = d = e = f = 0$$

Con questo il gruppo primitivo G_8 è posto in relazione d' isomorfismo oloedrico col gruppo

$$\overline{G}_8 = \boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q}$$

al quale è quindi simile –

§ 132

Riduzione a forma normale nei casi B) C)

Caso B) Non essendovi qui trasformazioni di 2º ordine, le trasformazioni alternate $(X_i X_k)$ formate con quelle di primo ordine si compongono precisamente come le associate Xf nelle (21), cioè

(24) $(X_3 X_4) = -2X_3 \ , \ (X_3 X_5) = X_4 \ , \ (X_3 X_6) = 0 \ , \ (X_4 X_5) = -2X_5$.

$$(X_4 X_6) = 0 \quad , \quad (X_5 X_6) = 0 \ .$$

Resta da scegliere le due del primo ordine X_1 , X_2 in guisa che sussistano le (23), cangiate le $\overline{X}$ nelle X. Anche qui è utile riferirsi dapprima alle $(X_1 X_6)$, $(X_2 X_6)$. Si ha

$$(X_1 X_6) = X_1 + aX_3 + bX_4 + cX_5 + dX_6$$

e prendendo per X_1 il secondo membro di questa risulta

$$(X_1 X_6) = 0$$

In modo analogo si sceglierà X_2 in modo che sia

$$(X_2 X_6) = 0$$

Dopo ciò, servendosi come nel caso A) delle identità Jacobiane in cui entri la X_6 si vede che anche tutti gli altri simboli

$$(X_1 X_i) \ , \ (X_2 X_i)$$

si esprimono come gli associati

$$(\overline{X}_1 \overline{X}_i) \ , \ (\overline{X}_2 \overline{X}_i)$$

Dunque il gruppo primitivo G_6 del caso B) è simile al gruppo

$$\overline{G}_6 = \boxed{p \, . \, q \, . \, xq \, . \, yp \, . \, xp \, . \, yq}$$

Caso C) — Anche qui per le trasformazioni del 1° ordine X_3 , X_4 , X_5 sussistono le relative formole fra le (24) —

Per le combinazioni delle $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ colle $\bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5$ abbiamo secondo le (23)

$$(\bar{X}_1\bar{X}_2)=0\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_3)=\bar{X}_2\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_4)=\bar{X}_1\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_5)=0$$

$$(\bar{X}_2\bar{X}_3)=0,\ (\bar{X}_2\bar{X}_4)=-\bar{X}_2\ ,\ (\bar{X}_2\bar{X}_5)=\bar{X}_1$$

Si tratta ora di scegliere X_1, X_2 in guisa che le stesse formole sussistano per le combinazioni di X_1, X_2 coi X_3, X_4, X_5. - Si ha:

$$(X_1X_4)=X_1+aX_3+bX_4+cX_5$$

e quindi ponendo

$$X_1'=X_1+\alpha X_3+\beta X_4+\gamma X_5$$

risulta

$$(X_1'X_4)=X_1'+(a-\alpha)X_3+(b-\beta)X_4+(c-\gamma)X_5-2\alpha X_3+$$
$$+2\gamma X_5\ ,$$

e prendendo

$$\alpha=\tfrac{1}{3}a\ ,\quad \beta=b\ ,\ \gamma=c$$

sarà

$$(X_1'X_4)=X_1'$$

Tornando ad indicare X_1' con X_1 avremo

$$(X_1X_4)=X_1$$

ed analogamente disponendo di X_2

$$(X_2X_4)=-X_2$$

Dopo ciò, servendosi al solito della identità Jacobiana, si dimostra facilmente che è raggiunto lo scopo voluto. Prendendo dapprima (X_1X_5) si ha

$$(X_1X_5)=aX_3+bX_4+cX_5\ ,$$

ma servendosi dell'identità

$$((X_1X_5),X_4)+((X_5X_4),X_1)+((X_4X_1),X_5)=0$$

risulta subito

$$(X_1X_5)=0$$

e analogamente

$$(X_2X_3)=0$$

Così pure da

$$(X_2X_5)=X_1+\alpha X_3+\beta X_4+\gamma X_5,$$

servendosi dell'identità Jacobiana con X_4, si trova $\alpha=\beta=\gamma=0$, cioè

$$(X_2X_5)=X_1$$

ed analogamente

$$(X_1X_3)=X_2.$$

Resta solo da provare che $(X_1X_2)=0$ - Poniamo che sia

$$(X_1X_2)\ =aX_1+bX_2+cX_3+dX_4+eX_5;$$

l'identità Jacobiana con X_4 dà subito

$$a=b=c=e=0$$

e quella con X_3 dimostra che anche $d=0$ -

Si conclude che nel caso (7) il gruppo G_5 è simile al gruppo

$$\boxed{p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp-yq}$$

Così sono determinati tutti i gruppi primitivi del piano ed otteniamo il risultato finale:

Un gruppo primitivo su due variabili può avere

soltanto 8, 6 ovvero 5 parametri ed è rispettivamente simile ad uno dei tre gruppi seguenti:

a) $G_8 \equiv (p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q)$

b) $G_6 \equiv (p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq)$

c) $G_5 \equiv (p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp-yq)$

§ 133

I gruppi G_8, G_6, G_5 come gruppi projettivi

Possiamo ora caratterizzare in modo molto semplice questi tre tipi di gruppi a) b) c) a cui si riducono, con un conveniente cangiamento di variabili, tutti i gruppi primitivi del piano. Diciamo che il gruppo a) ad 8 parametri è il gruppo generale projettivo del piano, cioè il gruppo delle sostituzioni lineari frazionarie sulle variabili x, y, le cui equazioni finite sono

$$(25_a) \quad x' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \quad y' = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3};$$

il gruppo b) è il gruppo di tutte le sostituzioni lineari intere

$$(25_b) \quad x' = a_1x+b_1y+c_1, \quad y' = a_2x+b_2y+c_2,$$

ossia quel sottogruppo del gruppo generale projettivo che lascia ferma la retta all'infinito; infine il

gruppo c) è quel sottogruppo del precedente in cui il determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ della sostituzione è uguale all'unità:

$$(25_c) \quad \left\{ x' = a_1x + b_1y + c_1 \ , \ y' = a_2x + b_2y + c_2 \ , \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1 \right.$$

Per dimostrare queste asserzioni basta calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici dei gruppi (25_a), (25_b), (25_c) e dimostrare che esse coincidono rispettivamente colle a), b), c).

Nel gruppo (25_a) l'identità è data dai valori dei parametri

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1$$
$$b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 = 0$$

e perciò la più generale trasformazione infinitesima del gruppo si otterrà ponendo

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t \ , \ b_2 = 1 + \beta_2 \delta t \ , \ c_3 = 1 + \gamma_3 \delta t$$
$$b_1 = \beta_1 \delta t \ , \ c_1 = \gamma_1 \delta t \ , \ a_2 = \alpha_2 \delta t \ , \ c_2 = \gamma_2 \delta t$$
$$a_3 = \alpha_3 \delta t \ , \ b_3 = \beta_3 \delta t$$

dove le α, β, γ sono costanti arbitrarie. Sostituendo in (25_a) e trascurando le potenze superiori di δt si ha in primo luogo

$$\frac{1}{1 + [\gamma_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y]\delta t} = 1 - [\gamma_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y]\delta t ,$$

indi

$$x' = \{x + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t\} \cdot \{1 - (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t\}$$

$$y' = \{y + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t\} \cdot \{1 - (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t\}$$

e perciò

$$\begin{cases} \delta x = \{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) - x(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\}\delta t \\ \delta y = \{(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) - y(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\}\delta t \end{cases}$$

La più generale trasformazione infinitesima del gruppo (25_a) è adunque

$$(26) \quad Xf = [\gamma_1 + (\alpha_1 - \gamma_3)x + \beta_1 y - \alpha_3 x^2 - \beta_3 xy]p + $$
$$+ [\gamma_2 + \alpha_2 x + (\beta_2 - \gamma_3)y - \alpha_3 xy - \beta_3 y^2]q;$$

come si vede essa è composta linearmente ed omogeneamente con costanti arbitrarie mediante le 8 fondamentali

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\quad x^2p + xyq,\quad xyp + y^2q,$$

che sono appunto quelle assegnate in a) per G_8 –

Ancora più semplice è la verifica per gli altri due casi – Per il gruppo (25_b) delle sostituzioni lineari intere a_3, b_3, c_3 hanno i valori fissi

$$a_3 = 0\ ,\ b_3 = 0,\ c_3 = 1$$

onde dobbiamo fare nella (26)

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0\ ;$$

le trasformazioni generatrici del gruppo sono quindi

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,$$

cioè quelle di G_6 in b)

In fine per le (25_c) essendo

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$$

dobbiamo porre la condizione

$$\delta(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

cioè

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0 \ ;$$

le trasformazioni generatrici del gruppo (25.) sono quindi

$$p \,.\, q \,.\, xq \,.\, yp \,.\, xp - yq$$

cioè quelle di G_5 in c) -

Riassumendo abbiamo quindi il teorema:

Ogni gruppo primitivo del piano possiede 8 o 6, ovvero 5 parametri - Nel primo caso è simile al gruppo delle sostituzioni lineari frazionarie su due variabili, nel secondo al gruppo delle sostituzioni lineari intere, nel terzo a quel sottogruppo di quest'ultimo in cui il determinante della sostituzione è uguale all'unità (gruppo derivato) -

È bene osservare che nello stabilire questi risultati generali Lie non si preoccupa della distinzione fra reale ed immaginario - Così un gruppo reale è detto imprimitivo anche se i sistemi d'imprimitività a cui dà luogo sono soltanto immaginari, mentre dal punto di vista reale dovrebbe dirsi primitivo - Così per es. è chiaro geometricamente che il gruppo G_3 dei movimenti del piano è primitivo dal punto di vista reale perchè non esistono sistemi reali di curve d'imprimitività - Esso però non rientra in uno dei tre tipi sopra trovati come i soli possibili per gruppi primitivi - La ragione sta in ciò che il detto

G_r è imprimitivo dal punto di vista generale; qui le linee d'imprimitività sono date dai due fasci di rette isotrope -

§ 134

Gruppi intransitivi del piano - Casi in cui $\bar{G}_r$ è ad uno o due parametri

Passiamo ora alla determinazione dei gruppi imprimitivi del piano. Qui però ci limiteremo a trovare tutti i possibili tipi di tali gruppi e lascieremo da parte la questione ulteriore di ridurre questi tipi al minimo numero.

Cominciamo dalla determinazione dei gruppi intransitivi, che appartengono sempre alla classe dei gruppi imprimitivi (§ 51).

Sia dunque G_r un gruppo intransitivo del piano; vi sarà un invariante del gruppo che potremo scegliere per una delle variabili indipendenti, p. e. la x. Le varietà minime invarianti (varietà d'intransitività) saranno qui le rette $x = \text{cost}^e$, cioè le parallele all'asse delle y. Le r trasformazioni infinitesime del gruppo $X_k f$ $(k = 1, 2 \ldots r)$ non conterranno la $\frac{\partial f}{\partial x}$ e si avrà quindi

$$X_k f = \eta_k q,$$

essendo la η_k una certa funzione di x, y.

Se diamo ad x un valore costante qualunque x_0 e poniamo

$$\eta_k(x_0, y) = \overline{\eta}_k,$$

le r trasformazioni infinitesime

$$\overline{X}_k f = \overline{\eta}_k \cdot q$$

saranno le generatrici del gruppo $\overline{G}_r$ sui punti della retta invariante $x = x_0$ - Questo essendo un gruppo sopra una sola variabile, non potrà avere che uno, due ovvero tre parametri (*). Ciò significa che almeno fra quattro qualunque delle η sussisterà una relazione lineare omogenea con coefficienti funzioni della x, ovvero già fra tre delle η sussisterà una tale relazione, o in fine fra due qualunque di esse, e secondo che G_r avrà tre parametri essenziali, o due o uno. Trattiamo nel presente § i due ultimi casi.

1° caso - Il gruppo $\overline{G}_r$ sopra ogni retta invariante $x = x_0$ abbia un solo parametro. Avremo allora

$$X_1 f = \eta_1 q \quad X_2 f = \varphi_2(x) \cdot \eta_1 q, \ldots\ldots X_r f = \varphi_r(x) \cdot \eta_1 q;$$

cangiando la variabile y in una nuova y (funzione di x, y) in guisa che $\frac{\partial \overline{y}}{\partial y} = \frac{1}{\eta_1}$ si potrà ridurre $\eta_1 q$ semplicemente a q, ed il nostro G_r sarà

$$4) \quad G_r \equiv [q, \varphi_2(x) q, \varphi_3(x) q, \ldots \varphi_r(x) q]$$

(*). Il caso che $\overline{G}_r$ si riduca all'identità deve evidentemente escludersi, perchè allora G_r stesso sarebbe l'identità -

Viceversa qualunque siano le funzioni della x

$$\varphi_2(x),\ \varphi_3(x) \ldots \varphi_r(x)$$

purchè linearmente indipendenti, cioè non legate da una relazione lineare a coefficienti costanti:

$$c_1 + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \ldots + c_r\varphi_r(x) = 0$$

le r trasformazioni infinitesime

$$q,\ \varphi_2(x)q,\ \varphi_3(x)q \ldots \varphi_r(x)q$$

generano un G_r intransitivo sulle due variabili x, y con r parametri. In questo primo caso il gruppo G_r è evidentemente Abeliano

2° caso. Il gruppo $\bar{G}_r$ sia a due parametri. Potremo allora supporre che

$$\eta_3,\ \eta_4 \ldots \eta_r$$

si esprimano linearmente ed omogeneamente per η_1, η_2 colle formole

$$(27) \qquad \eta_k = \varphi_k(x)\eta_1 + \psi_k(x)\eta_2 \qquad (k = 3, 4 \ldots r),$$

mentre η_1, η_2 non sono legate da alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti funzioni della x, il rapporto $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ non sarà indipendente dalla y. Se costruiamo la trasformazione alternata

$$(28) \qquad U = (X_1 X_2) = \left(\eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right) q.$$

questa dovrà essere una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di $X_1 f,\ X_2 f \ldots X_r f$, e quindi per le (27) avremo

$$(29) \qquad U = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f$$

dove ω_1, ω_2 sono funzioni della sola x. La U non può essere identicamente nulla, cioè non può aversi simultaneamente $\omega_1 = \omega_2 = 0$, perchè allora, per la (28) sarebbe:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = 0$$

contro l'ipotesi. Ora dimostriamo facilmente che ω_1, ω_2 debbono essere due costanti. Per ciò osserviamo che si ha

$$\begin{cases} (X_1, U) = (X_1, \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2) = \omega_2 (X_1 X_2) = \omega_2 U \\ (X_1, \omega_2 U) = \omega_2 (X_1 U) = \omega_2^2 U \\ (X_1, \omega_2^2 U) = \omega_2^2 (X_1 U) = \omega_2^3 U \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (U, X_2) = (\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2, X_2) = \omega_1 (X_1 X_2) = \omega_1 U \\ (\omega_1 U, X_2) = \omega_1 (U X_2) = \omega_1^2 U \\ (\omega_1^2 U, X_2) = \omega_1^2 (U X_2) = \omega_1^3 U. \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e quindi tutte le trasformazioni

$$(\alpha) \quad U, \ \omega_2 U, \ \omega_2^2 U, \ \omega_2^3 U \dots\dots$$

$$(\beta) \quad U, \ \omega_1 U, \ \omega_1^2 U, \ \omega_1^3 U \dots\dots$$

sono nel gruppo, per quanto si prolunghi la serie (α) e la (β). Per ciò tanto ω_1 quanto ω_2 debbono essere costanti; altrimenti per quante trasformazioni si prendessero in (α) o in (β) esse sarebbero sempre indipendenti, ciò che è assurdo essendo il gruppo finito.

Poichè adunque ω_1, ω_2 sono costanti, $X_1 f$, $X_2 f$ gene-

rano un sottogruppo a due parametri; questo non essendo Abeliano, potremo supporre cangiando linearmente X_1, X_2 che sia (§ 76)

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

Con una trasformazione sulla y potremo fare semplicemente

$$X_1 f = q;$$

ed avendosi allora $\eta_1 = 1$, ne verrà

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 1$$

cioè $\eta_2 = y + \theta(x)$, e prendendo $y + \theta(x)$ come nuova y sarà

$$X_1 f = q \;,\; X_2 f = yq$$

Per qualunque altra $X_k f$ abbiamo

$$X_k f = (\varphi_k(x) + \psi_k(x) \cdot y) q,$$

indi

$$(X_1 X_k) = \psi_k \cdot q \;,\; (X_1 \,.\, \psi_k q) = \psi_k^2 q \,.$$

$$(X_1 \,.\, \psi_k^2 q) = \psi_k^3 q \ldots\ldots,$$

onde si conclude (come sopra per ω_1, ω_2) che ψ_k è una costante c_k — Sostituendo quindi ad $X_k f$ la

$$X_k f - c_k X_2 f = \varphi_k(x) \cdot q,$$

vediamo che in questo caso al gruppo G_r si può dare la forma

$$\text{D)}\quad G_r \equiv \boxed{q \,.\, yq \,.\, \varphi_3(x) \cdot q \,.\, \varphi_4(x) \cdot q \,.\, \ldots \varphi_r(x) \cdot q}$$

Viceversa se $\varphi_3(x), \varphi_4(x) \ldots\ldots \varphi_r(x)$ sono funzioni arbitrarie delle x linearmente indipendenti le r trasfor-

nazioni infinitesime

$$q, yq, \varphi_3(x)\cdot q, \varphi_4(x)\cdot q, \ldots\ldots \varphi_r(x)\cdot q$$

generano un gruppo G_r sulle due variabili x, y del tipo richiesto.

§. 135

Caso in cui il gruppo ridotto $\bar{G}_r$ è a tre parametri

In questo caso potremo supporre che

$$X_4 f = \eta_4 q, \ldots\ldots X_r f = \eta_r q$$

siano combinazioni lineari, a coefficienti funzioni della x, di

$$X_1 f = \eta_1 q, \quad X_2 f = \eta_2 q, \quad X_3 f = \eta_3 q,$$

mentre fra X_1, X_2, X_3 non sussisterà una tale identità. Consideriamo le tre trasformazioni infinitesime

$$U_1 = (X_2 X_3), \quad U_2 = (X_3 X_1), \quad U_3 = (X_1 X_2)$$

le quali appartengono al gruppo; avremo quindi

$$(30)\quad \begin{cases} U_1 = (X_2 X_3) = \omega_{11} X_1 + \omega_{12} X_2 + \omega_{13} X_3 \\ U_2 = (X_3 X_1) = \omega_{21} X_1 + \omega_{22} X_2 + \omega_{23} X_3 \\ U_3 = (X_1 X_2) = \omega_{31} X_1 + \omega_{32} X_2 + \omega_{33} X_3, \end{cases}$$

dove le ω_{ik} saranno funzioni della x, e primo nostro oggetto sarà di provare che sono costanti assolute. Intanto osserviamo che se si fa $x = x_0$ le X_1, X_2, X_3 si riducono a $\bar{X}_1 f, \bar{X}_2 f, \bar{X}_3 f$ generatrici del gruppo ridotto $\bar{G}_r$ a tre

parametri, che è simile al gruppo projettivo sopra una variabile – Questo coincide col proprio gruppo derivato (§ 75) e per ciò il determinante

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{\omega}_{11} & \bar{\omega}_{12} & \bar{\omega}_{13} \\ \bar{\omega}_{21} & \bar{\omega}_{22} & \bar{\omega}_{23} \\ \bar{\omega}_{31} & \bar{\omega}_{32} & \bar{\omega}_{33} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero – A più forte ragione sarà dunque

$$(31) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ciò premesso, costruiamo le trasformazioni alternate $(U_i X_k)$ che per le (30) saranno

$$(32) \begin{cases} (U_1, X_1) = -\omega_{12} U_3 + \omega_{13} U_2, & (U_1 X_2) = \omega_{11} U_3 - \omega_{13} U_1, & (U_1 X_3) = -\omega_{11} U_2 + \omega_{12} U_1 \\ (U_2 . X_1) = -\omega_{22} U_3 + \omega_{23} U_2, & (U_2 X_2) = \omega_{21} U_3 - \omega_{23} U_1, & (U_2 X_3) = -\omega_{21} U_2 + \omega_{22} U_1 \\ (U_3 X_1) = -\omega_{32} U_3 + \omega_{33} U_2, & (U_3 X_2) = \omega_{31} U_3 - \omega_{33} U_1, & (U_3 X_3) = -\omega_{31} U_2 + \omega_{32} U_1 \end{cases}$$

L'identità Jacobiana:

$$((X_1 X_2), X_3) + ((X_2 X_3) . X_1) + ((X_3 X_1) X_2) = (U_3 X_3) + (U_2 X_2) + (U_1 X_1) = 0$$

diventa quindi

$$(\omega_{32} - \omega_{23}) U_1 + (\omega_{13} - \omega_{31}) U_2 + (\omega_{21} - \omega_{12}) U_3 = 0,$$

dalla quale, sostituendo per U_1, U_2, U_3 i valori (30) e ricordando che X_1, X_2, X_3 non sono legate da alcuna relazione, si deduce

$$(\omega_{32} - \omega_{23}) \omega_{1i} + (\omega_{13} - \omega_{31}) \omega_{2i} + (\omega_{21} - \omega_{12}) \omega_{3i} = 0$$

$$i = 1, 2, 3;$$

e poichè $\Delta \neq 0$ ne segue

$$\omega_{21}=\omega_{12}\,, \quad \omega_{32}=\omega_{23}\,, \quad \omega_{13}=\omega_{31}\,,$$

cioè Δ è un determinante simmetrico.

Costruiamo ora le trasformazioni alternate

$$(U_1 U_2)\,,\ (U_2 U_3)\,,\ (U_3 U_1)\,;$$

abbiamo

$$(U_1 U_2)=(\omega_{11}X_1+\omega_{12}X_2+\omega_{13}X_3\,,\ \omega_{21}X_1+\omega_{22}X_2+\omega_{23}X_3)\,.$$

Indicando quindi con ω'_{ik} il complemento algebrico di ω_{ik} in Δ, ne risulta

$$(U_1 U_2)=\omega'_{31}U_1+\omega'_{32}U_2+\omega'_{33}U_3$$

ossia per le (30) e per essere Δ simmetrico

$$(U_1 U_2)=\Delta X_3\,.$$

e similmente

$$(U_2 U_3)=\Delta X_1\,, \quad (U_3 U_1)=\Delta X_2$$

Le trasformazioni $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$ sono dunque nel gruppo, e però anche

$$(X_2\,.\,\Delta X_3)=\Delta U_1\,.\ (X_3\,\Delta X_1)=\Delta U_2\,.\ (X_1\,.\,\Delta X_2)=\Delta U_3\,.$$

e così

$$(U_1\,.\,\Delta U_2)=\Delta^2 X_3\,,\ (U_2\,.\,\Delta U_3)=\Delta^2 X_1\,,\ (U_3\,.\,\Delta U_1)=\Delta^2 X_2$$

Così continuando vediamo che le

$$X_i\,,\ \Delta X_i\,,\ \Delta^2 X_i\,,\ \Delta^3 X_i\,, \ldots\ldots$$

sono tutte nel gruppo, e per conseguenza Δ è costante.

Ora avremo nel gruppo anche le trasformazioni

$$(X_2\,.\,(U_1 X_1)) \quad (X_3\,.\,(U_1 X_1))$$

ossia

$$(X_2\,.\ \omega_{13}U_2-\omega_{12}U_3)=\omega_{13}(X_2 U_2)-\omega_{12}(X_2 U_3)=$$

$$= \omega_{12}(\omega_{31}U_3 - \omega_{33}U_1) - \omega_{13}(\omega_{21}U_3 - \omega_{23}U_1) = \omega'_{12}U_1$$

$$(X_3, \omega_{13}U_2 - \omega_{12}U_3) = \omega_{12}(U_3X_3) - \omega_{13}(U_2X_3) =$$

$$= \omega_{12}(\omega_{32}U_1 - \omega_{31}U_2) - \omega_{13}(\omega_{22}U_1 - \omega_{21}U_2) =$$

$$= \omega'_{13}U_1,$$

quindi anche

$$(X_2, \omega'_{12}(\omega_{13}U_2 - \omega_{12}U_3)) = \omega'^2_{12}U_1, \quad (X_3, \omega'_{13}(\omega_{13}U_2 - \omega_{12}U_3)) = \omega'^2_{13}U_1.$$

Continuando nel medesimo modo vediamo che $\omega'_{12}, \omega'_{13}$ sono costanti, e similmente dicasi per ω'_{23} - Osservando poi che

$$\Delta X_1 = \omega'_{11}U_1 + \omega'_{12}U_2 + \omega'_{13}U_3$$

vediamo che anche $\omega'_{11}U_1$ appartiene al gruppo, onde si conclude, nel solito modo, che ω'_{11} è una costante; similmente $\omega'_{22}, \omega'_{33}$ - Dunque Δ ed i suoi minori del 2° ordine essendo costanti, sono pure costanti gli elementi stessi ω_{ik} del determinante, ciò che dimostra intanto che le tre trasformazioni X_1f, X_2f, X_3f generano un gruppo a tre parametri

Ora diciamo che questo gruppo

$$G_3 = \boxed{X_1X_2X_3}$$

esaurisce già il gruppo G_r, che cioè ogni altra trasformazione infinitesima $\mathfrak{X}f$ di G_r è composta linearmente, con coefficienti costanti, con X_1, X_2, X_3 - Intanto avremo certamente

$$\mathfrak{X}f = \varphi_1(x) X_1f + \varphi_2(x) X_2f + \varphi_3(x) X_3f$$

Per provare che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono tre costanti, cominciamo dal semplificare le formole di composizione pel gruppo G_3 osservando che esso ha la composizione del gruppo generale projettivo e perciò si può scegliere X_1, X_2, X_3 in guisa che si abbia

$$(33)\quad (X_1X_2) = X_1 f\ ,\ (X_1X_3) = 2X_2 f\ ,\ (X_2X_3) = X_3 f$$

Ora abbiamo in G_2 la

$$(X_1\,,\ \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3) = \varphi_2 X_1 + 2\varphi_3 X_2\ ,$$

indi

$$(X_1\,,\ \varphi_2 X_1 + 2\varphi_3 X_2) = 2\varphi_3 X_1\ ,$$

onde segue, pel solito ragionamento, che φ_3 è costante.

Analogamente

$$(X_2\,,\ \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3) = \varphi_3 X_3 - \varphi_1 X_1\ ,$$

dunque anche $\varphi_1 X_1$ è nel gruppo e per ciò φ_1 è costante, quindi anche φ_2 c. d. d.

Nel caso attuale il gruppo G_2 ha dunque 3 parametri e la composizione (33) - Cangiando la variabile y possiamo fare $\eta_1 = 1$, cioè

$$X_1 f = q$$

e le (33) danno

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 1\ ,\ \frac{\partial \eta_3}{\partial y} = 2\eta_2\ ,\ \eta_2 \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \eta_3 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} = \eta_3$$

Ne segue

$$\eta_2 = y + \psi(x) \qquad \eta_3 = \eta_2^2$$

e cangiando $y + \psi(x)$ in y, abbiamo

$$X_1 f = q\ ,\ X_2 f = yq\ ,\ X_3 f = y^2 q$$

quale forma tipica pel nostro gruppo:

c) $G_3 \equiv \boxed{q \cdot yq \cdot y^2q}$

§ 136

Gruppi imprimitivi transitivi - Caso in cui il gruppo accorciato Γ ha un solo parametro

Passiamo ora a determinare i gruppi imprimitivi transitivi sopra due variabili x, y. Rispetto ad un tale gruppo G_r avremo almeno una divisione del piano curve d'imprimitività

$$X(x,y) = \text{cost}^{te}$$

Prendendo per nuova variabile x la X, le linee d'imprimitività saranno le rette $x = \text{cost}^{te}$ parallele all'asse delle y. Per i risultati del § 98 le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo avranno la forma

$$X_k f = \xi_k(x) \cdot p + \eta_k(x,y) q, \quad (k = 1, 2 \ldots r)$$

dove i primi coefficienti ξ_k sono funzioni della sola x.

Le trasformazioni accorciate

$$\overline{X}_k f = \xi_k p \quad (k = 1, 2 \ldots r)$$

generano il gruppo Γ sulle rette d'imprimitività $x = \text{cost}^{te}$.

Questo gruppo Γ sopra una sola variabile può avere uno, due ovvero tre parametri, il caso in cui Γ si riduce all'identità dovendo qui escludersi perchè allo-

ra avremmo il caso già sopra esaminato di un gruppo G_r intransitivo – La nostra ricerca si scinde quindi naturalmente in tre problemi successivi, secondo che Γ ha uno, due ovvero tre parametri. Trattiamo nel presente § il primo caso.

Le r trasformazioni associate $X_k f$ si riducono in questo caso ad una sola indipendente, poniamo alla $X_1 f$ e si ha quindi

$$\xi_2 = a_2 \xi_1 , \ \xi_3 = a_3 \xi_1 , \dots \xi_r = a_r \xi_1$$

le a essendo costanti.

Assumendo in luogo di

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_r f$$

come generatrici le altre

$$X_1 f, X_2 f - a_2 X_1 f, \dots X_r f - a_r X_1 f$$

rendiamo $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_r = 0$, cioè

$$X_1 f = \xi_1 p + \eta_1 q , \ X_2 f = \eta_2 q , \dots X_r f = \eta_r q .$$

Cangiando il parametro x possiamo fare semplicemente $\xi_1 = 1$, cioè

$$X_1 f = p + \eta_1 q , \ X_2 f = \eta_2 q , \dots X_r f = \eta_r q$$

Evidentemente le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

non contengono p e perciò si esprimono linearmente, con coefficienti costanti, con $X_2 f, \dots X_r f$ soltanto – Ne segue che

$$X_2 f, X_3 f, \dots X_r f$$

generano un sottogruppo invariante ad r-1 param

tri di G_r — Questo sottogruppo G_{r-1} è quello che lascia fissa ciascuna retta x = cost^{te} — Esso è intransitivo e potrà quindi ridursi ad uno dei tre tipi a) b) c) dei §§ 134. 135.

Così il nostro gruppo G_r avrà una delle tre forme

a') $\quad q \,.\, \varphi_2(x)q \,.\, \varphi_3(x)q, \dots \varphi_{r-1}(x)q \,.\, p+\eta(x,y)q$

b') $\quad q \,.\, yq \,.\, \varphi_3(x)q \cdots\cdots \varphi_{r-1}(x)q \,.\, p+\eta(x,y)q$

c') $\quad q \,.\, yq \,.\, y^2q \,.\, p+\eta q$

[illegible] successivamente esaminare questi tre casi [illegible] le condizioni cui debbono soddisfare le $\varphi(x)$ e la $\eta(x,y)$ perchè ogni volta si abbiano [illegible] trasformazioni generatrici di un gruppo

Caso a')

La trasformazione

$$(\varphi_k(x)q \,,\, p+\eta q) = \left(\varphi_k\frac{\partial\eta}{\partial y} - \varphi_k'\right)q$$

deve appartenere al gruppo e comporsi quindi con

$$q \,,\, \varphi_2 q \cdots\cdots \varphi_{r-1}q \,;$$

Ne risulta che $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ non contiene y (perchè esiste almeno una φ, la $\varphi_1 = 1$), e perciò

$$\eta = \alpha(x)y + \beta(x)$$

Cangiando la y in

$$\bar{y} = A(x)y + B(x)$$

la $p+\eta q$ prende la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(A'y+B') + \eta A\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \,,$$

che possiamo ridurre semplicemente a p determinando A, B in modo che sia

$$A'+\alpha A=0 \,,\quad B'+\beta A=0 \,.$$

Così avremo ridotto $\eta = 0$, cioè avremo

$$G_r^1 = \boxed{\varphi_1 q \cdot \varphi_2 q \cdot \varphi_3 q \cdots \varphi_{r-1} q \cdot p}$$

ed ora dovendo φ_k' comporsi linearmente, con coefficienti costanti, con $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{r-1}$, la teoria delle equazioni differenziali lineari (a coefficienti costanti) dimostra che $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_{r-1}$ si comporranno linearmente con funzioni del tipo seguente

$$e^{\alpha_1 x},\ x e^{\alpha_1 x},\ x^2 e^{\alpha_1 x} \ldots\ldots x^{m_1} e^{\alpha_1 x}$$
$$e^{\alpha_2 x},\ x e^{\alpha_2 x},\ x^2 e^{\alpha_2 x} \ldots\ldots x^{m_2} e^{\alpha_2 x}$$
. . . .

dove le α sono costanti e $m_1, m_2 \ldots\ldots$ numeri interi.

Il gruppo G_r avrà dunque la forma

d) $$G_r \equiv \boxed{e^{\alpha_i x} q,\ x e^{\alpha_i x} q \ldots\ldots x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ p}$$

con $i = 1, 2, \ldots s$; $\Sigma m_i + s = r - 1$

Viceversa, qualunque siano le costanti α_i si vede subito che le trasformazioni infinitesime precedenti soddisfano alle condizioni del teorema principale e generano un gruppo.

Caso b')

Qui abbiamo ancora

$$(\varphi_k(x) q \cdot p + \eta q) = \left(\varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial y} - \varphi_k'\right) q$$

e questa trasformazione dovrà comporsi linearmente con

$$q \cdot yq \cdot \varphi_1(x) q, \cdots \varphi_{r-1}(x) q \ldots$$

quindi $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ deve essere lineare intera in y e per ciò

$$\eta = \alpha(x)\,y^2 + \beta(x)\cdot y + \gamma(x)$$

Ora essendo

$$(yq\,.\,p+\eta q) = \left(y\frac{\partial\eta}{\partial y} - \eta\right)q =$$

$$= \left(\alpha(x)\cdot y^2 - \gamma(x)\right)q$$

si conclude che deve essere $\alpha=0$ e γ deve comporsi colle φ - Nel gruppo trovandosi già la $\gamma(x)\cdot q$ possiamo ridurre η semplicemente a $\beta(x)\cdot y$, quindi

$$p+\eta q = p+\beta(x)\cdot yq$$

Introducendo come nel caso a') una conveniente funzione $\bar{y} = A(x)\cdot y$ al posto di y, possiamo rendere $\eta=0$ - Così il gruppo acquista la forma

$$\boxed{\varphi_1(x)q\,,\ \varphi_2(x)q\,,\ \ldots\,\varphi_{r-2}(x)q\,,\ yq\,,\ p}$$

Se si tralascia la yq le rimanenti generano un sottogruppo G_{r-1} che appartiene al tipo determinato nel caso a'). Possiamo dunque ridurre il G_r attuale alla forma tipica

$$e)\qquad G_r \equiv \boxed{e^{\alpha_i x}q,\ xe^{\alpha_i x}q,\ \ldots\ldots x^{m_i}e^{\alpha_i x}q,\ yq,\ p}$$

$$i = 1,2\ldots s\quad ;\quad s+\Sigma m_i = r-2$$

Inversamente le trasformazioni e) generano sempre effettivamente un gruppo

Caso c')

Qui abbiamo

$$(q\,.\,p+\eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial y}q$$

e perciò deve $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ comporsi linearmente, con coefficienti costanti, con y^3, y; quindi sarà

$$\eta = \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \psi(x),$$

essendo α, β, γ costanti. – Poichè già nel gruppo figurano yq, y^2q si può ridurre η semplicemente a

$$\eta = \alpha y^3 + \psi(x)$$

Ora

$$(yq, p + \eta q) = (2\alpha y^3 - \psi)q,$$

quindi $\alpha = 0$ e ψ è una costante che si può prendere senz'altro $= 0$ figurando già q nel gruppo. – Il gruppo attuale può dunque ridursi alla forma

$$f) \qquad G_4 = \boxed{q, yq, y^2q, p}$$

§ 137
Caso in cui Γ ha due parametri

In questo caso, essendo

$$X_k f = \xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q$$

le r trasformazioni generatrici di G_r, fra tre qualunque delle ξ passa una relazione a coefficienti costanti. – Il gruppo associato Γ

$$\Gamma \equiv (\xi_1 p, \xi_2 p, \xi_3 p, \ldots \xi_r p)$$

avendo due parametri, può ridursi, cangiando la variabile x, alla forma (§. 123)

$$\boxed{p, xp}$$

dopo di che le $X_k f$ acquistano la forma

$$X_k f = (a_k x + b_k) p + \eta_k(x, y) q,$$

le a, b essendo costanti. — Si possono quindi prendere come generatrici del gruppo le r trasformazioni seguenti

$$\eta_1 q, \ \eta_2 q, \dots \eta_{r-2} q, \ p + \eta_{r-1} q, \ xp + \eta_r q$$

Le prime $r-1$ di queste generano un sottogruppo G_{r-1} di G_r perchè le loro espressioni alternate, non contenendo il termine xp, si compongono con quelle $r-1$ trasformazioni stesse. Questo G_{r-1} è un gruppo imprimitivo, il cui gruppo associato ha un solo parametro, esso può quindi ridursi, supposto dapprima $r > 2$, ad una delle tre forme d) e) f) del paragrafo precedente, e ciò cangiando linearmente la y il che non fa cangiare la forma dell'ultima trasformazione $xp + \eta_r q$.

Dopo ciò avremo da trattare successivamente tre casi, associando ad $r-1$ trasformazioni della forma d) e) f) una r^{ma} della forma $xp + \eta q$. In fine poi nel caso $r = 2$ le prime $r-1$ trasformazioni si riducono all'unica p, alla quale dovremo associare una $xp + \eta q$ in guisa da avere il gruppo richiesto.

(250 d')

Le trasformazioni generatrici del gruppo G_r sono

$$(\alpha) \qquad e^{\alpha_i x}, \ x e^{\alpha_i x} q, \dots x^{m_i} e^{\alpha_i x} q, \ p, \ xp + \eta q$$

$$i = 1, 2 \dots s, \quad 1 + \Sigma m_i = r - 2$$

Abbiamo

$$(e^{\alpha_i x} q,\ xp+\eta q) = \left(e^{\alpha_i x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \alpha_i x e^{\alpha_i x}\right) q$$

$$(p,\ xp+\eta q) = p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q$$

onde risulta che di queste due trasformazioni di G_r la prima si compone colle prime $r-2$, la seconda colle prime $r-1$ e per ciò $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ sono indipendenti da y, onde sarà

$$\eta = ay + \theta(x)$$

con a costante. Ora se formiamo

$$(x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ xp+\eta q) = (x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ xp+(ay+\theta(x))q) =$$

$$= \left\{(a-m_i)x^{m_i} e^{\alpha_i x} - \alpha_i x^{m_i+1} e^{\alpha_i x}\right\} q$$

ed osserviamo che nel gruppo $e^{\alpha_i x}$ figura al massimo col fattore x^{m_i}; ne deduciamo $\alpha_i = 0$. Dunque il gruppo G_r ha la forma

$$(\beta) \qquad q,\ xq,\ x^2 q, \ldots\ x^{r-3} q,\ p,\ xp+(ay+\theta(x))q.$$

Si ha

$$(p,\ xp+(ay+\theta(x))q) = p+\theta'(x) q$$

onde risulta che θ' è un polinomio di grado $r-3$ in x indi θ un polinomio di grado $r-2$. Per ciò si può ridurre l'ultima a

$$xp + (ay + bx^{r-2})q$$

con a, b costanti.

Cangiando y in $y + cx^{r-2}$ (c costante) le prime $r-2$ trasformazioni (β) non cangiano, la penultima diventa

$$p + c(r-2)x^{r-3} q$$

che si può ridurre a p, comparendo già nel gruppo la $x^{r-3}q$.

L'ultima si cangia in

$$xp+\{(r-2-a)c+b\}x^{r-2}q+ayq$$

e se $r-2\neq a$ prendendo $c=\frac{b}{a+2-r}$ si riduce ad $xp+ayq$, per cui abbiamo un gruppo G_r del tipo

g) $\boxed{q,\ xq,\ x^2q\ \ldots\ x^{r-2}q,\ p,\ xp+ayq}$

Nel caso $a=r-2$ se $b=0$ l'ultima trasformazione ha già la forma precedente in g) – Se poi $b\neq 0$ la

$$xp+((r-2)y+bx^{r-2})q,$$

cangiando y in $\frac{y}{b}$, diventa

$$xp+((r-2)y+x^{r-2})q\ -$$

Abbiamo così il nuovo tipo

h) $\boxed{q,\ xq,\ x^2q,\ \ldots\ x^{r-3}q,\ p,\ xp+((r-2)y+x^{r-2})q}$;

viceversa le g) come le h) generano sempre effettivamente un gruppo –

Caso e')

Le trasformazioni generatrici di G_r sono

(e') $e^{\alpha_i x}q,\ xe^{\alpha_i x}q,\ \ldots\ x^{m_i}e^{\alpha_i x}q,\ yp,\ p,\ xp+\eta q$

Formando anche qui

$$(e^{\alpha_i x}q,\ xp+\eta q)=\left(e^{\alpha_i x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\alpha_i x\, e^{\alpha_i x}\right)q$$

vediamo che $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ deve essere lineare in y e quindi

$$\eta=\alpha(x)y^2+\beta(x)y+\gamma(x)$$

Ma poiché

$$(yq,\ xp+\eta q)=\left(y\frac{\partial\eta}{\partial y}-\eta\right)q=(\alpha y^2-\gamma)q$$

dovrà essere $\alpha=0$ e γq comporsi colle prime $r-2$ trasforma-

zioni (γ); perciò γ può omettersi in η e prendere

$$xp + \eta q = xp + \beta(x) \cdot yq$$

Abbiamo poi

$$(p,\ xp + \beta(x) yq) = p + \beta' yq$$

onde si rileva che β' è una costante e possiamo prendere

$$xp + \eta q = xp + axyq \quad (a \text{ costante})$$

Ora

$$(x^{m_r} e^{\alpha_i x} q,\ xp + axyq) = \{(a - \alpha_i) x^{m_i+1} e^{\alpha_i x} - m_i x^{m_i} e^{\alpha_i x}\} q,$$

dunque

$$\alpha_i = a$$

e le generatrici di G_r sono

$$e^{ax} q,\ x e^{ax} q \ldots x^{r-4} e^{ax} q,\ yq,\ p,\ xp + axyq$$

Cangiando y in $e^{-ax} y$ queste diventano

$$q,\ xq \ldots x^{r-4} q,\ yq,\ p - ayq,\ xp$$

e si può fare $a = 0$ - Così abbiamo il gruppo del tipo

i) $\boxed{q,\ xq \ldots x^{r-4} q,\ yq,\ p,\ xp}$

Caso f')

Le generatrici del gruppo sono

$$q,\ yq,\ y^2 q,\ p,\ xp + \eta q\,;$$

abbiamo

$$(q,\ xp + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q$$

e quindi $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ è un polinomio di 2° grado in y, cioè

$$\eta = ay^3 + by^2 + cy + \theta(x)$$

I termini in y, y^2 possono sopprimersi in η comparendo

già yq, y^2q in G_4; rimane

$$xp + \eta q = xp + (ay^3 + \theta(x))q .$$

Ora

$$(yq \, . \, xp + (ay^3 + \theta(x))q) = (2ay^3 - \theta(x))q$$

onde $a = 0$ e θ è una costante, che si può assumere $= 0$. Così abbiamo il gruppo G_4 del tipo

j) $\boxed{q \, . \, yq \, . \, y^2q \, . \, p \, . \, xp}$

Caso in cui r=2

In quest'ultimo caso il gruppo è

$$\boxed{p \, . \, xp + \eta q}$$

e la trasformazione alternata

$$(p \, , \, xp + \eta q) = p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q$$

deve ridursi a p per cui $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, cioè η è una funzione della sola y. Questa non può esser nulla, altrimenti il gruppo sarebbe intransitivo. Cangiando la variabile y troviamo così il tipo:

$$\boxed{p \, , \, xp + q}$$

§. 138

Caso in cui Γ ha tre parametri

Le r trasformazioni generatrici di G_r siano al solito

$$X_k f = \xi_k(x)p + \eta_k(x,y)q$$
$$k = 1, 2, \dots r$$

Il gruppo associato Γ generato dalle

$$\xi_k(x) \cdot p$$

avendo tre parametri, fra quattro qualunque delle ξ passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Con un cangiamento della variabile x si può ridurre Γ alla forma

$$\Gamma \equiv \boxed{p,\ xp,\ x^2p},$$

quindi le $X_k f$ hanno la forma

$$X_k f = (a_k x^2 + b_k x + c_k)p + \eta_k(x,y)q,$$

le a, b, c essendo costanti. Possiamo quindi assumere le generatrici di G_r sotto la forma

(S) $\eta_1 q,\ \eta_2 q, \cdots \eta_{r-3} q,\ p + \eta_{r-2} q,\ xp + \eta_{r-1} q,\ x^2 p + \eta_r q$

Le prime $r-1$ di queste generano un sottogruppo G_{r-1} che appartiene al caso del paragrafo precedente e è transitivo. Cangiando la variabile y, ciò che non muta la forma dell'ultima trasformazione, possiamo ridurre il G_{r-1} ad uno dei tipi

g) h), i) j)

sopra esaminati. Alle corrispondenti generatrici dovremo aggiungere la trasformazione

$$x^2p+\eta q$$

in guisa da ottenere il G_r richiesto

Caso g')

Abbiamo le r trasformazioni

$$q,\ xq,\ x^2q, \dots x^{r-4}q,\ p,\ xp+ayq,\ x^2p+\eta q$$

e formando in primo luogo

$$(q,\ x^2p+\eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial y}q$$

$$(p,\ x^2p+\eta q) = 2xp+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$

ne risulta

$$\eta = (a_0x^{r-4}+a_1x^{r-5}+\dots+a_{r-4})y+\theta(x)$$

e

$$(p,\ x^2p+\eta q) = 2xp+\{[(r-4)a_0x^{r-5}\dots+a_{r-5}]y+\theta'(x)\}q$$

onde segue

$$a_0=0,\ a_1=0, \dots a_{r-6}=0,\ a_{r-5}=2a$$

$$\eta = (2ax+b)y+\theta(x)$$

con $\theta(x)$ polinomio di grado $r-3$ in x

Poi essendo

$$(x^{r-4}q,\ x^2p+\eta q) = \{(2a-(r-4))x^{r-3}+bx^{r-4}\}q$$

deduciamo

$$2a = r-4$$

In $\theta(x)$ possiamo omettere i termini di grado inferiore a $r-3$ e prendere

$$\eta=\{(r-4)x+b\}y+cx^{r-3}$$

Le due ultime trasformazioni sono

$$xp+\frac{r-4}{2}yq\ ,\quad x^2p+\{[(r-4)x+b]y+cx^{r-3}\}q$$

e combinate danno

$$x^2p+\{(r-4)xy+\frac{r-2}{2}cx^{r-3}\}q$$

Questa deve dunque essere eguale all'ultima trasformazione e per ciò si ha

$$b=0\quad ,(r-4)c=0$$

Se $c=0$, raddoppiando la penultima trasformazione, si ha il tipo:

l) $q,\ xq,\ \ldots\ x^{r-4}q,\ p,\ 2xp+(r-4)yq,\ x^2p+(r-4)xyq$; $r>3$

Quando $c\neq 0$ ed $r=4$ abbiamo il tipo

m) $q,\ p,\ xp,\ x^2p+cxq$

Caso h')

Abbiamo le trasformazioni generatrici

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^{r-4}q,\ p\ ,\ xp+[(r-3)y+x^{r-3}]q\ ,\ x^2p+\eta q\ .$$

Come nel caso g') se ne trae dapprima che si può porre

$$\eta=ay+(r-4)xy+\theta(x)$$

e formando

$$(p\ ,\ x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial\eta}{\partial x}q=$$

$$=2xp+\{(r-4)y+\theta'(x)\}q\ ,$$

vediamo che questa dovrebbe essere la penultima trasformazione duplicata, onde seguirebbe

$$r-4 = 2(r-3),$$

cioè $r=2$ - Questo caso è adunque impossibile -

(Caso i')

Abbiamo le trasformazioni

$$q,\ xq \dots x^{r-5}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+\eta q$$

Ora

$$(q,\ x^2p+\eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q,$$

quindi

$$\eta = (a_0 x^{r-5} + a_1 x^{r-4} + \dots a_{r-5})y + ay^2 + \theta(x)$$

Da

$$(yq,\ x^2p+\eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q = (ay^2 - \theta)q$$

segue $a=0$ e si può omettere $\theta(x)$ in η, poichè $\theta.q$ è già nel gruppo; resta

$$x^2p+\eta q = x^2p + (a_0 x^{r-5} + \dots + a_{r-5})y.q$$

Da

$$(p,\ x^2p+\eta q) = 2xp + \{(r-5)a_0 x^{r-6} + \dots + a_{r-6}\}yq$$

segue

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{r-7} = 0,$$

onde l'ultima trasformazione diventa

$$x^2p + (a_{r-6}x + a_{r-5})yq$$

Omettendo il termine yq, comparendo già yq nel gruppo, abbiamo

$$x^2p + \eta q = x^2p + cxyq$$

In fine

$$(x^{r-5}q,\ x^2p+cxyq)=(c-r+5)x^{r-4}q$$

e per ciò $c=r-5$ - Nel tipo attuato abbiamo dunque il gruppo

n) $\boxed{q,\ xq,\ \dots\ x^{r-5}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+(r-5)xyq}$

Caso j')

Le trasformazioni generatrici sono le 6

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p+\eta q$$

Abbiamo

$$(q,\ x^2p+\eta q)=\frac{\partial\eta}{\partial y}q$$

$$(p,\ x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$

onde si rileva

$$\eta=\alpha y^3+\beta y^2+\gamma y+\delta x+\varepsilon$$

con $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ costanti - Di queste si possono porre nulle le β,γ,ε comparendo già

$$y^2q,\ yq,\ q$$

nel gruppo e resta

$$\eta=\alpha y^3+\delta x$$

Ora

$$(xp,\ x^2p+\eta q)=x^2p+\delta xq\ .$$

dunque $\delta=0$ e da

$$(y^2q,\ x^2p+\alpha y^3q)=\alpha y^4q$$

segue anche $\alpha=0$ - Resta dunque il tipo

$$\boxed{q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p}$$

Caso k')

Perchè le tre trasformazioni

$$p,\ xp+q,\ x^2p+\eta q$$

generino un gruppo, essendo

$$(p,\ x^2p+\eta q) = 2xp + \frac{\partial\eta}{\partial x}q$$

$$(xp+q,\ x^2p+\eta q) = x^2p + \left\{x\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right\}q$$

dovremo avere

$$\eta = 2x + \theta(y)$$

con $\theta'(y) = \theta(y)$, quindi $\theta = ae^y$.

Se $a=0$, abbiamo il tipo

$q)$ $$\boxed{p,\ xp+q,\ x^2p+2xq}$$

Quando $a \neq 0$ prendendo per nuova y la

$$\bar{y} = x + ae^y$$

abbiamo l'altro tipo

$r)$ $$\boxed{p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q}$$

Caso in cui G_{r-1} è intransitivo

Resta da ultimo a considerare il caso eventuale in cui il sottogruppo G_{r-1} considerato al principio del presente paragrafo sia intransitivo.

Ciò richiede che si abbia $r=3$ e le trasformazio-

ni generatrici saranno

$$p+\eta_1 q\ ,\quad xp+\eta_2 q\ ,\quad x^2p+\eta_3 q\ .$$

Ma il gruppo formato dalle prime due essendo intransitivo sarà $\eta_2 = x\eta_1$ - Cangiando la y ci riduciamo al gruppo

$$p\ ,\ xp\ ,\ x^2p+\eta q$$

Essendo

$$(p,\, x^2p+\eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial x} q$$

$$(xp,\, x^2p+\eta q) = x^2p + x\frac{\partial\eta}{\partial x} q\ ,$$

dobbiamo avere $\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$, onde segue $\eta = 0$ - Il gruppo G_r sarebbe dunque esso stesso intransitivo.

Così risultano effettivamente trovati tutti i possibili tipi di gruppi continui finiti del piano.

Per gli imprimitivi resterebbe ancora da risolvere la questione di ridurre questi tipi al minimo numero riconoscendo quali dei tipi trovati sono equivalenti fra loro. - Rimandiamo per questa ricerca all'opera stessa del Lie (*).

(*) Lie-Engel III pag. 58 e seg.ti -

Capitolo XI°

Prime applicazioni della teoria dei gruppi continui finiti ai problemi d'integrazione delle equazioni differenziali -

§. 139
Preliminari

Nei capitoli precedenti abbiamo cercato di far conoscere le parti principali della teoria dei gruppi continui di trasformazioni, costruita da Lie. Converrebbe ora che ci occupassimo delle applicazioni analitiche e geometriche di queste teorie, che sono numerose ed importanti - Ma la ristrettezza dei limiti imposti ad un corso obbligandoci ad una scelta, noi daremo qui la preferenza alle applicazioni che riguardano i problemi d'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie - Esporremo in questo primo capitolo quelle prime ricerche di Lie sulla integrazione delle equazioni differenziali, con un gruppo noto di trasformazioni in se medesime, che hanno accompagnato, ed in certe parti determinato, lo sviluppo della teoria dei gruppi continui -

In generale diciamo che nei problemi d'integrazione la teoria dei gruppi continui compie un ufficio analogo a quello della teoria dei gruppi di sostituzioni nel lo studio delle equazioni algebriche secondo Galois. Queste interessanti relazioni appaiono nel modo più evidente nelle applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari che Picard iniziò, e Picard stesso e Vessiot svolsero poi parallelamente alla nota teoria di Galois. Di queste tratteremo nel prossimo capitolo.

Ritorniamo alle prime ricerche di Lie sulle equazioni differenziali, già sopra accennate e delle quali ora vogliamo occuparci. I noti metodi che per certe classi di equazioni differenziali conducono alla risoluzione per quadrature, o all'abbassamento dell'equazioni stesse, si presentarono ai matematici sino dal primo sviluppo della teoria. Essi sembrarono per altro dovuti più ad una felice ispirazione che non conseguenze di principii generali. Il Lie coordinò la massima parte di questi metodi sotto un unico principio, dimostrando che il successo dipendeva quasi sempre dal fatto che era noto, od immediatamente visibile, un gruppo continuo di trasformazioni ad uno o più parametri, ammesso dall'equazione differenziale, cioè tale che le sue trasformazioni finite riconducevano l'equazione in

se stessa - Così è sorta una teoria della integrazione delle equazioni differenziali con un gruppo noto di trasformazioni in sè medesime. Noi ci proponiamo nel presente capitolo di compendiarne brevemente i risultati, che si trovano diffusamente esposti nel libro di Lie-Scheffers: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen -

§ 140
Equazioni differenziali del primo ordine che ammettono un gruppo Xf

---

Cominciamo le nostre ricerche dal caso più semplice di un'equazione differenziale del primo ordine

$$f(x, y, y') = 0$$

che supponiamo inoltre dapprima risoluta rispetto alla derivata $y' = \frac{dy}{dx}$ e scriviamo quindi sotto la forma

$$(1) \qquad \beta dx - \alpha dy = 0$$

essendo α, β funzioni note di x, y - Se $\omega(x, y)$ è un integrale della (1) il sistema ∞^1 di curve integrali

$$(2) \qquad \omega(x, y) = \text{cost}^{te}$$

da' una divisione del piano – Diciamo che l'equazione differenziale (1) ammette un gruppo G_r di trasformazioni quando ogni trasformazione di G_r cangia in se medesimo il sistema di curve (2), cioè cangia ogni curva integrale in un' altra curva integrale; in altre parole l'equazione differenziale (1) ammette il gruppo G_r, quando la divisione (2) del piano fornita dalle curve integrali è una divisione d'imprimitività rispetto al gruppo (§ 51) –

Consideriamo dapprima il caso di un gruppo G_1 ad un parametro e sia

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

la sua trasformazione infinitesima generatrice – I risultati ottenuti ai §§ 51. 52 conducono subito ai criterii che permettono di decidere se l'equazione differenziale (1) ammette il gruppo

$$G_1 = Xf$$

Basta per ciò ricordare che l'integrazione della (1) è perfettamente equivalente a quella dell'equazione associata a derivate parziali

$$(3) \qquad Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; .$$

nel senso che ogni integrale della (1) è una soluzione della (3) e viceversa – I teoremi stabiliti al § 52 ci danno quindi subito i criterii seguenti:

I) – L'equazione differenziale (1) ammette il gruppo Xf allora ed allora soltanto quando applicando l'opera_

zione X ad un integrale ω della (1) il risultato $X\omega$ è funzione di ω stessa, cioè un altro integrale.

L'applicazione di questo criterio richiede la previa integrazione della equazione differenziale.

Ma abbiamo altresì l'altro criterio:

II) Affinchè l'equazione differenziale (1) ammetta il gruppo ad un parametro Xf, è necessario e sufficiente che fra le operazioni Af, Xf sussista un'identità della forma

$$(4) \qquad (XA) = \lambda Af$$

essendo λ una funzione di x, y.

Per applicare questo criterio basta evidentemente conoscere l'equazione differenziale e la trasformazione infinitesima Xf.

In ogni caso la questione proposta si riporta dal gruppo G_1 alla trasformazione infinitesima generatrice Xf, ciò che possiamo esprimere dicendo che la equazione differenziale ammette il gruppo G_1 quando ne ammette la trasformazione infinitesima generatrice Xf.

Un'osservazione è subito necessaria. Per qualunque equazione differenziale (1) si possono immediatamente assegnare infinite trasformazioni infinitesime Xf ammesse dall'equazione: se prendiamo infatti

$$Xf = \rho \cdot Af,$$

dove ρ è un fattore qualunque di proporzionalità funzione di x, y, si vede subito, applicando il criterio I) e II), che la trasformazione infinitesima $\rho . Af$ cangia l'equazione differenziale (1) in se medesima - È evidente che in tal caso il gruppo G_1 generato dalla $\rho . Af$ cangia non solo il sistema delle curve integrali (2) in se medesimo, ma singolarmente ogni curva integrale in se stessa. Diremo di una tale trasformazione infinitesima che essa non è essenziale per l'equazione differenziale. Al contrario diremo essenziale la trasformazione infinitesima Xf, ammessa dall'equazione differenziale (1), quando non sia proporzionale alla Af, ossia quando le traiettorie del gruppo Xf non coincidano colle curve integrali della (1) - Ciò equivale a dire che consideriamo come essenziale la trasformazione infinitesima Xf quando il gruppo G_1 da questa generato permuta effettivamente fra loro le curve integrali (2) -

§ 141
Relazione fra le trasformazioni infinitesime essenziali ed i fattori integranti

Supponiamo che della equazione differenziale (1)

$$(1) \qquad \beta dx - \alpha dy = 0$$

si conosca una trasformazione infinitesima essenziale

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Essendo ω un integrale della (1), ossia una soluzione dell'equazione aggiunta (3), avremo

$$A\omega = 0 \;, \quad X\omega = F(\omega)$$

essendo F una funzione di ω che non può ridursi a zero, altrimenti la Xf non sarebbe essenziale contro l'ipotesi. Cangiando ω in una sua conveniente funzione possiamo rendere (*)

$$X\omega = 1$$

e dalle due equazioni simultanee

$$\begin{cases} \xi \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 1 \\ \alpha \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(*) Si ha infatti

$$X(\theta(\omega)) = \theta'(\omega) X\omega$$

e facendo $\theta'(\omega) = \frac{1}{F(\omega)}$ o $\theta = \int \frac{d\omega}{F(\omega)}$ si avrà

$$X(\theta(\omega)) = 1$$

si trae

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\beta}{\beta\xi - \alpha\eta} \, , \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{-\alpha}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

cioè

$$d\omega = \frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

Questo dimostra che il fattore

$$M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un moltiplicatore, o fattore integrante, del primo membro dell'equazione differenziale.

Abbiamo così il teorema fondamentale:

A) Se l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesima essenziale

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \, ,$$

l'espressione

$$M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un fattore integrante dell'equazione differenziale.

La conoscenza di quella trasformazione infinitesima riduce alle quadrature l'integrazione della proposta colla formola

$$\int \frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta} = \text{cost}^{te}$$

Al medesimo risultato si può arrivare anche dalla formola (4) che assegna la condizione perchè l'equazione differenziale (1) ammetta la trasformazione infinitesima Xf - La (4) sviluppata ci dà

infatti

$$(5)\qquad \frac{X\alpha - A\xi}{\alpha} = \frac{X\beta - A\eta}{\beta},$$

che si può scrivere sotto la forma equivalente

$$(5^*)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\beta\xi-\alpha\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\beta x-\alpha\eta}\right) = 0$$

ed esprime appunto che l'espressione

$$\frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un differenziale esatto –

Esempî

Applichiamo subito questi primi risultati ad alcuni esempi semplici:

1° Nell'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

i coefficienti α, β siano funzioni omogenee del medesimo grado di x, y, ossia l'equazione abbia la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Essa ammette evidentemente la trasformazione infinitesima

$$Xf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

generatrice del gruppo d'omotetia rispetto all'origine ed ha quindi il fattore integrante

$$M = \frac{1}{\beta x - \alpha y}$$

2° Si consideri nel piano xy una curva qualunque e se ne deduca un sistema ∞^1 di curve assoggettando la curva data ad una traslazione continua;

ovvero ad una rotazione continua attorno ad un punto. Questo sistema di curve ammetterà quindi un gruppo G_1 noto di movimenti. -

Si proponga ora il problema di trovare le traiettorie ortogonali di questo sistema di curve, o più in generale le loro traiettorie sotto un angolo fisso dato. Si ha così, per determinare queste traiettorie, un'equazione differenziale del 1° ordine, che ammette evidentemente questo G_1 e per ciò si integra con quadrature. Le medesime deduzioni valgono sostituendo al G_1 di movimenti un G_1 di trasformazioni conformi, p. e. l'omotetia continua rispetto ad un punto fisso.

§ 142

Determinazione di tutte le trasformazioni infinitesime ammesse da una data equazione differenziale

Il risultato contenuto nel teorema A) può facilmente invertirsi nel modo seguente. Se M è un fattore integrante di $\beta dx - \alpha dy$ e si prendono ξ, η in guisa che sia

$$\beta\xi - \alpha\eta = \frac{1}{M}$$

l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammetterà la trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

E infatti essendo $\frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$ un differenziale esatto, è soddisfatta la (5*), ossia l'equivalente (5); e questa esprime appunto che l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesima $\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$ -

Ora è ben noto che esistono infiniti fattori integranti M di un'espressione differenziale $\beta dx - \alpha dy$ e precisamente se M_1 è uno di essi ed ω è l'integrale di $\beta dx - \alpha dy = 0$, il più generale fattore integrante M è dato da

$$M = M_1 \cdot \theta(\omega)$$

dove θ è una funzione arbitraria dell'argomento ω.

Ne risulta che ogni equazione differenziale del primo ordine ammette infinite trasformazioni infinitesime in se medesima (dipendenti da funzioni arbitrarie); queste formano, come vedremo ora più da vicino, un gruppo continuo infinito nel senso di Lie, determinato dall'equazione differenziale stessa - Intanto cerchiamo la più generale trasformazione infinitesima Xf in questione, supposta nota una particolare X_1f, che sia però altro essenziale -

Se

$$X_1f = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y}$$

sarà

$$M_1 = \frac{1}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1}$$

un particolare fattore integrante e quindi il più generale M sarà

$$M = \frac{M_1}{\theta(\omega)},$$

essendo $\theta(\omega)$ funzione arbitraria di ω - Pel teorema A) ed il suo inverso, la più generale trasformazione infinitesima cercata Xf si avrà determinando ξ, η da

$$\beta\xi - \alpha\eta = \frac{1}{M} = \theta(\omega)(\beta\xi_1 - \alpha\eta_1)$$

ossia

$$\frac{\xi - \theta(\omega)\xi_1}{\alpha} = \frac{\eta - \theta(\omega)\eta_1}{\beta}$$

ciò che dà

$$\begin{cases} \xi = \theta(\omega)\xi_1 + \rho\alpha \\ \eta = \theta(\omega)\eta_1 + \rho\beta, \end{cases}$$

essendo ρ una funzione, che può essere qualunque, di x, y - Si ha quindi

$$Xf = \theta(\omega) \cdot X_1 f + \rho Af.$$

cioè il teorema:

B) Se $X_1 f$ è una trasformazione infinitesima essenziale dell'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

e si pone

$$Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}$$

l'espressione più generale Xf di una trasformazione infinitesima dell'equazione stessa è data da

$$(6) \qquad Xf = \theta(\omega) X_1 f + \rho A f$$

dove $\theta(\omega)$ è una funzione arbitraria dell'integrale ω dell'equazione differenziale e ρ una funzione arbitraria di x, y —

Le infinite trasformazioni infinitesime Xf generano un gruppo continuo infinito di Lie (§ 36); le equazioni di definizione di questo gruppo si riducono qui all'unica (5) che sviluppata si scrive:

$$\beta \left\{ \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \eta \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\} =$$

$$= \alpha \left\{ \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi \frac{\partial \beta}{\partial x} - \eta \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\}$$

È facile riconoscere in effetto che ad una tale equazione di definizione appartiene la proprietà caratteristica c) § 35, che cioè se

$$(\xi_1, \eta_1) \quad (\xi_2, \eta_2)$$

ne sono soluzioni, anche

$$\bar{\xi} = \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

$$\bar{\eta} = \xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$$

ne sono nuovamente soluzioni. — Nel modo più semplice riconosciamo ciò applicando il criterio I) § 140, onde segue che se l'equazione differenziale ammette le trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

ammette anche l'alternata $(X_1 X_2)$ -

Si osservi ancora che nella formola (6) che lega due trasformazioni infinitesime qualunque Xf, $X_1 f$ dell'equazione differenziale il coefficiente $\theta(\omega)$ è il quoziente $\frac{M_1}{M}$ dei due rispettivi fattori integranti

$$M_1 = \frac{1}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1} \quad , \quad M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

Riguardiamo Xf, $X_1 f$ come effettivamente diverse rispetto all'equazione differenziale quando $\theta(\omega)$ è un'effettiva funzione di ω, non una costante; in caso contrario diremo Xf, $X_1 f$ equivalenti. Si vede subito che due trasformazioni equivalenti trasformano nel medesimo modo le curve integrali -

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema.

Se

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

sono due trasformazioni distinte (non equivalenti) dell'equazione differenziale $\beta dx - \alpha dy = 0$, si ha immediatamente un integrale, senza quadrature, dal quoziente

$$\frac{\beta\xi - \alpha\eta}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1}$$

Il risultato principale conseguito nel presente paragrafo consiste in questo che: ogni equazione dif.

ferenziale del 1° ordine possiede un gruppo continuo infinito di trasformazioni in se stesso.

Invece si vedrà che le equazioni differenziali d'ordine superiore solo eccezionalmente ammettono gruppi continui di trasformazioni (cf. §.)

§. 143
Interpretazione geometrica dei fattori integranti

Alle relazioni sopra studiate fra i fattori integranti di un' equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

e le sue trasformazioni infinitesime si lega una elegante interpretazione geometrica data da Lie pei fattori integranti. — Sia M un fattore integrante di $\beta dx - \alpha dy$, talché

$$M(\beta dx - \alpha dy)$$

sarà il differenziale esatto di una funzione di x, y che indicheremo con u:

$$(a) \qquad M(\beta dx - \alpha dy) = du$$

Consideriamo altresì le traiettorie ortogonali delle curve integrali dell'equazione data: esse hanno per equazione differenziale

$$\alpha dx + \beta dy = 0$$

e sia N un fattore integrante di $\alpha dx+\beta dy$, sicchè

$$(\beta)\qquad N(\alpha dx+\beta dy)=dv,$$

dove v è una funzione di x, y — Se due funzioni u, v sono evidentemente fra loro indipendenti e possono essere scelte a nuove variabili in luogo di x, y — Calcoliamo l'elemento lineare

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

in coordinate (curviline) u, v. dalle (α), (β) abbiamo:

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\beta N du+\alpha M dv}{(\beta^2+\alpha^2)MN} \\ \\ dy=\dfrac{-\alpha N du+\beta M dv}{(\beta^2+\alpha^2)MN} \end{cases}$$

e quindi

$$(\gamma)\qquad ds^2=dx^2+dy^2=\frac{1}{\beta^2+\alpha^2}\left\{\frac{du^2}{M^2}+\frac{dv^2}{N^2}\right\}$$

Se indichiamo con ds_v l'elemento lineare delle linee $v=\text{cost}^{te}$, traiettorie ortogonali delle curve integrali dell'equazione differenziale data, abbiamo dalla (γ)

$$ds_v=\frac{du}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\cdot M},$$

cioè

$$\frac{1}{M}=\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\,\frac{ds_v}{du}.$$

L'inversa del fattore integrante M risulta così decomposta nel prodotto di due fattori

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ ,\quad \frac{ds_v}{du}$$

Il primo $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ è già ~~fissato~~ dall'equazione differenziale; il secondo è proporzionale a ds_v cioè al_

la distanza infinitesima normale di una curva integrale $u = cost^e$ dalla successiva $u + du$ - Cangiando u in una funzione di u, il fattore integrante si muta in un qualunque altro -

Di questa interpretazione geometrica diamo due semplici applicazioni -

1°

Supponiamo che le curve integrali $u = cost^e$ della equazione

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

siano parallele, cioè le loro traiettorie ortogonali siano rette - Allora il tratto infinitesimo di normale compreso fra una curva u e la successiva ~~u+du~~ è costante e perciò sarà $M = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ un fattore integrante - Dunque: Condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve integrali dell'equazione $\beta dx - \alpha dy = 0$ siano parallele è che l'espressione

$$\frac{\beta dx - \alpha dy}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

risulti un differenziale esatto.

2°

Se curve integrali delle due equazioni differenziali

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$
$$\alpha dx + \beta dy = 0$$

formano un doppio sistema ortogonale - Questo dicesi

isotermo se divido il piano in quadrati infinitesimi. Perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che nella (7) risulti il coefficiente di du eguale a quello di dv, cioè $M=N$ - Le due espressioni differenziali

$$\beta dx - \alpha dy\,, \quad \alpha dx + \beta dy$$

hanno dunque in tal caso un fattore integrante comune M. Scrivendo le relative condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(M\beta)}{\partial y} + \dfrac{\partial(M\alpha)}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial(M\alpha)}{\partial y} - \dfrac{\partial(M\beta)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\partial \log M}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial \log M}{\partial y} = -\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right) \\[2mm] -\beta\dfrac{\partial \log M}{\partial x} + \alpha\dfrac{\partial \log M}{\partial y} = \dfrac{\partial\beta}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} \end{cases}$$

se ne traggono i valori di $\frac{\partial \log M}{\partial x}$, $\frac{\partial \log M}{\partial y}$ in funzione di x, y e quindi $\log M$ con una quadratura. Dunque: Se le curve integrali di $\beta dx - \alpha dy = 0$ appartengono a un doppio sistema ortogonale isotermo, si avranno con quadrature le equazioni in termini finiti delle curve stesse e delle loro traiettorie ortogonali -

§ 144

Caso di equazioni del 1° ordine non risolute rapporto ad y'

In ciò che precede abbiamo sempre supposto che l'equazione differenziale del 1° ordine fosse risoluta rispetto alla derivata prima y'. Ma molte volte accadrà che tale risoluzione non si sappia o non si possa eseguire, e converrà stabilire ancora dei criteri per riconoscere se la data equazione differenziale ammette un dato gruppo e dei processi per trovare le equazioni differenziali che ammettono un dato gruppo — Gli studi che abbiamo fatto nel Cap. IX sui gruppi prolungati agli elementi lineari e sugli invarianti differenziali ci pongono in grado di risolvere, in tutta generalità, questi problemi —

Scriviamo una generale equazione del 1° ordine sotto la forma

$$(8) \qquad \Omega(x, y, y') = 0$$

Essa stacca dalla totalità ∞^3 di elementi lineari del piano una doppia infinità di tali elementi, ed il problema d'integrazione consiste nell'ordinare questi ∞^2 elementi lineari in ∞^1 serie, costituite ciascuna dagli ∞^1 elementi lineari di una curva —

Osserviamo che la (8) sarà un'effettiva equazione differenziale solo quando Ω contenga effettivamente y' - Però anche se Ω contiene solo x, y la (8) definisce sempre una doppia infinità di elementi lineari del piano e precisamente tutti quelli che escono dai punti della curva $\Omega(x, y) = 0$ -

Poniamo ora di voler riconoscere se l'equazione differenziale (8) ammette il gruppo ad un parametro G_1 generato dalla trasformazione infinitesima:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Per le trasformazioni di G_1 gli elementi lineari del piano vengono permutati fra loro secondo le trasformazioni del gruppo prolungato $G_1^{(1)}$ (§ 112) generato dalla trasformazione infinitesima prolungata

$$X^{(1)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y'},$$

dove il coefficiente η_1 si calcola, secondo i risultati del § 119, dalla formula

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2$$

Perchè l'equazione differenziale (8) ammetta il gruppo G_1, è necessario e sufficiente che riguardando x, y, y' come tre variabili indipendenti, l'equazione $\Omega(x, y, y') = 0$ ammetta il gruppo $G_1^{(1)}$, cioè che la superficie

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

sia invariante rispetto al gruppo $G_1^{(1)}$ - Basta appli-

care i criterii generali stabiliti al § 44 per dedurne il teorema fondamentale:

Affinchè l'equazione differenziale del 1° ordine fra x, y

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

ammetta il gruppo ad un parametro

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

è necessario e sufficiente che l'equazione

$$\xi\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \left\{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial y'} = 0$$

sia una conseguenza della $\Omega = 0$

Naturalmente se l'equazione $\Omega(x, y, y') = 0$ è scritta sotto forma risoluta

$$\beta - \alpha y' = 0,$$

applicando il criterio precedente si ritrova la (5) del § 141, come è facile verificare.

§ 145

Determinazione delle equazioni di 1° ordine che ammettono un dato G_r

Dopo le osservazioni fondamentali del paragrafo precedente, dato un gruppo G_r su due variabili x, y, la ricerca delle equazioni differenziali del 1° ordine che ammettono il gruppo G_r è ridotta ad una questione che abbiamo già imparato a risolvere nel Cap.

IV - Se costruiamo infatti il gruppo prolungato $G_2^{(1)}$ agli elementi lineari e riguardiamo x, y, y' come variabili indipendenti, il problema equivale a ricercare tutte le superficie invarianti rispetto al gruppo $G_2^{(1)}$ - Quando le equazioni finite di G_2, e quindi quelle di $G_2^{(1)}$, siano note il problema si risolve con processi algebrici, e se sono date le trasformazioni infinitesime generatrici di G_2 mediante integrazione di sistemi completi.

In particolare cerchiamo tutte le equazioni di 1° ordine

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

che ammettono il G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Dovremo costruire il gruppo prolungato $G_1^{(1)}$ generato da

$$X^{(1)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial \xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

e cercare, nello spazio generato dalle tre variabili x, y, y', le superficie invarianti rispetto a $G_1^{(1)}$ - In ordine ai risultati generali del Cap. IV queste superficie invarianti o sono luoghi di ∞^1 trajettorie del gruppo $G_1^{(1)}$, o sono costituite da punti tutti invarianti -

Ma siccome escludiamo il caso delle equazioni $\Omega = 0$ non contenenti y', quest'ultimo caso non può presentarsi, per ogni punto invariante rispetto a $G_1^{(1)}$

dovendo aversi simultaneamente

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

Secondo il risultato finale del § 117 troveremo tutte le cercate equazioni $\Omega(x\, y\, y') = 0$ costruendo i due invarianti del gruppo $G_1^{(1)}$ a tre variabili x, y, y' e ponendo l'uno eguale ad una funzione arbitraria dell'altro. Rispetto al gruppo dato G_1 possiamo dunque dire: Tutte le equazioni differenziali del 1° ordine invarianti rispetto a G_1 si ottengono eguagliando a zero un invariante differenziale del 1° ordine di G_1 stesso.

Gli invarianti indipendenti di $G_1^{(1)}$ sono due, che diciamo u, v - Pel primo u si può prendere la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sicchè le curve $u = \text{cost}^{\text{te}}$ sono le trajettorie di G_1 e il secondo invariante $v(x, y, y')$ (che sarà un effettivo invariante differenziale del 1° ordine di G_1) sarà l'ulteriore soluzione dell'equazione

$$(9) \quad X^{(1)}F = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

(cf. § 119) - La forma più generale di un'equazione differenziale del 1° ordine che ammette il gruppo G_1 sarà allora

$$(10) \qquad v - \varphi(u) = 0$$

ove $\varphi(u)$ è una funzione arbitraria di u -

Importa ora osservare che: noto l'invariante ordinario u, l'invariante differenziale v si calcolerà con una quadratura.

E infatti la ricerca delle soluzioni della (9) equivale all'integrazione del sistema simultaneo

(11) $$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2}$$

di cui è già noto per ipotesi un integrale

(12) $$u(x, y) = c \qquad (c \text{ costante})$$

Eliminando dalle (11) p. e. la y per mezzo della (12) si ha l'equazione differenziale del tipo di Riccati

(12) $$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\xi}\left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2\right\},$$

contenente il parametro c. Ma di questa ci è già nota la soluzione particolare

$$y' = \frac{\eta}{\xi},$$

come si verifica facilmente osservando che dalla (11) si trae appunto per y' questo valore e d'altronde

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial y'}{\partial x} + y' \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

e sostituendo nella (12) si trova subito identicamente verificata (*). Poiché dunque conosciamo della equazione di Riccati (12) un integrale particolare, avremo

---

(*) Si può anche riconoscere a priori questo fatto osservando che gli ∞^2 elementi lineari delle curve $u = c$, traiettorie di G_1, formano una varietà invariante rispetto a $G_1^{(1)}$, cioè danno un integrale del sistema simultaneo (11) -

anche con quadrature l'integrale generale.

Così abbiamo dimostrato: Data la trasformazione infinitesima generatrice Xf di un gruppo G_1, e note le traiettorie di questo gruppo, si possono determinare con quadrature tutte le equazioni differenziali del 1° ordine che ammettono il gruppo G_1.

§ 146

Sistemi di equazioni differenziali e loro trasformazioni infinitesime

Volendo ora passare alla ricerca delle equazioni differenziali d'ordine superiore ed alle eventuali loro trasformazioni infinitesime, dobbiamo in primo luogo ricordare che ogni sistema di equazioni differenziali ordinarie si può ridurre, aumentando convenientemente il numero delle funzioni incognite, ad un sistema del 1° ordine della forma normale

$$(I) \qquad \frac{dx_0}{\alpha_0} = \frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dx_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{dx_n}{\alpha_n}$$

dove con x_0 si è indicata la variabile indipendente, con $x_1, x_2 \dots x_n$ n funzioni incognite di questa e le

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$$

sono funzioni note delle $n+1$ variabili $x_0\ x_1 \dots x_n$ —

— Dobbiamo dunque occuparci dei gruppi continui di trasformazioni ammessi dal sistema (I), che cangiano cioè in se medesimo il sistema delle curve integrali

della (I) nello spazio ad $n+1$ dimensioni $S_{n+1} = (x_0 x_1 \dots x_n)$

Alla considerazione del sistema (I) si può sostituire quella dell'equazione a derivate parziali associata

$$(II) \qquad Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

della quale ogni soluzione dà un integrale del sistema (I) e viceversa.

Come al § 140 dobbiamo in primo luogo stabilire i criterii per riconoscere se il sistema differenziale (I), o l'equazione a derivate parziali associata $Af=0$, ammette un gruppo G_1 ad un parametro di cui sia data la trasformazione infinitesima generatrice

$$Xf = \xi_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Basta applicare i risultati stabiliti al § 52 per dedurne i criterii richiesti sotto l'una o sotto l'altra delle due forme seguenti:

a) Perchè il sistema differenziale (I) ammetta il gruppo Xf, è necessario e sufficiente che, applicando l'operazione X ad un qualunque integrale $\omega(x_0 \dots x_n)$ di (I), il risultato $X\omega$ sia un altro integrale (o una costante).

b) Il sistema differenziale (I) ammette il gruppo Xf solo quando fra le due operazioni del primo ordine Xf, Af sussiste un'identità della forma

$$(XA) = \lambda Af,$$

essendo λ una funzione di $x_0\ x_1, \dots x_n$.

Basta in ogni caso che il sistema differenziale ammetta la trasformazione infinitesima Xf perchè

ammetta il gruppo G_1 da essa generato.

§. 147
Proprietà delle trasformazioni infinitesime ammesse da un sistema differenziale (I)

Per trattare i problemi fondamentali che abbiamo in vista conviene premettere uno studio sulle trasformazioni infinitesime ammesse da un sistema differenziale (I) o ciò che è lo stesso da un'equazione a derivate parziali (II) $Af=0$

Per maggiore chiarezza cominciamo dall'enunciare esplicitamente la seguente proprietà d'immediata evidenza - Se l'equazione a derivate parziali $Af=0$ ammette le q trasformazioni infinitesime $X_1f, X_2f, \dots X_qf$ e con un cangiamento qualunque delle variabili $x_0\, x_1 \dots$ $\dots x_n$ nelle $x'_0\, x'_1 \dots x'_n$ si cangiano rispettivamente $Af, X_1f, \dots X_qf$ in $A'f, X'_1f, \dots X'_qf$, l'equazione

$$A'f=0$$

ammetterà le q trasformazioni infinitesime trasformate

$$X'_1f, X'_2f, \dots X'_qf$$

Dopo ciò dimostriamo il teorema:

1° Un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a n+1 variabili $(x_0 \ldots x_n)$ ammette sempre n e non più trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_n f$$

non legate fra loro ed alla Af da una relazione della forma:

$$\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \cdots\cdots + \mu_n X_n f + \lambda Af = 0$$

dove le μ e λ sono funzioni delle x.

E infatti, con una trasformazione di variabili, possiamo fare p. e.

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0}.$$

e prendendo

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\ldots X_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

abbiamo subito le n trasformazioni infinitesime dotate delle proprietà richieste – Che poi non si possano avere più di n trasformazioni X indipendenti fra loro e dalla Af ciò è evidente perchè le variabili sono $n+1$.

Suppongasi ora di conoscere q trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots\ldots X_q f$$

ammesse dalla $Af = 0$; sussiste allora il teorema:

2° Qualunque trasformazione Xf della forma

$$Xf = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \cdots\cdots + \omega_q X_q f + \lambda Af$$

dove le $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_q$ sono soluzioni della $Af = 0$ (o costanti)

e λ una funzione arbitraria delle x sarà anche una trasformazione infinitesima della $Af=0$ —

Per vederlo basta applicare il criterio b) del paragrafo precedente, osservando che per ipotesi

(13) $(X_1 A) = \lambda_1 Af\,,\ (X_2 A) = \lambda_2 Af \ldots\ldots (X_q A) = \lambda_q Af$

onde risulta

(13*) $(X, A) = (\sum_i^q \omega_i X_i f + \lambda Af,\ Af) = \sum_i \omega_i \lambda_i Af - \sum_i A\omega_i X_i f -$

$$- A\lambda . Af$$

ossia (essendo $A\omega_i = 0$)

$$(X, A) = (\sum_i \omega_i \lambda_i - A\lambda). Af = \rho . Af$$

Ora di più trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_q f$$

ammesse dalla $Af=0$ diremo che sono essenzialmente distinte solo quando fra di esse e la Af non sussiste alcuna identità lineare (a coefficienti variabili).

Se si pone

$$X_i f = \sum_k^{0\ldots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \ldots q)$$

saranno le $X_1 f, \ldots X_q f$ essenzialmente distinte quando la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots\ldots & \alpha_n \\ \xi_{10} & \xi_{11} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{20} & \xi_{21} & \ldots\ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{q0} & \xi_{q1} & \ldots\ldots & \xi_{qn} \end{Vmatrix}$$

abbia la caratteristica $q+1$ - In generale se la caratteristica è $r+1$ con $r<q$, r soltanto delle X saranno essenzialmente distinte e le $q-r$ rimanenti si comporranno linearmente con quelle r o con Af (*).

Ciò premesso, veniamo a dimostrare un teorema che dà la proprietà inversa di quella stabilita nel teorema 2° e cioè:

3° Se $X_1f, X_2f \ldots X_qf$ sono q trasformazioni infinitesime distinte ammesse dalla $Af=0$ e la $Af=0$ ammette ancora la trasformazione infinitesima

(14) $$Xf = \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \ldots + \mu_q X_q f + \lambda Af$$

combinazione lineare delle $X_1 f \ldots X_q f$ e dello Af i coefficienti $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$ saranno altrettante soluzioni di $Af=0$ (o costanti) -

Per il calcolo eseguito nelle (13*) si ha infatti

(*) Si noti che fra le $q+1$ forme lineari nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_q f,\ Af$$

ve ne saranno precisamente $r+1$ indipendenti e fra queste si può sempre far figurare Af, perchè se p. e.

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_r f,\ X_{r+1} f$$

sono indipendenti sarà Af una loro combinazione lineare che possiamo sostituire ad una di esse, p. e. a $X_{r+1} f$ ed allora le $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f, Af$ sono indipendenti

$$(X,A)=\left(\sum_i^{1\ldots q}\lambda_i\mu_i - A\lambda\right).Af - \sum_i^{1\ldots q}A\mu_i . X_i f$$

e poichè per ipotesi (X,A) è proporzionale ad Af, avremo

$$\sum_i^{1\ldots q} A\mu_i . X_i f = \rho . Af$$

Ma non sussistendo per ipotesi alcuna identità di questa forma fra $X_1 f, \ldots X_q f$ ed Af si avrà necessariamente

$$A\mu_1 = 0\,, \quad A\mu_2 = 0\,, \ldots A\mu_q = 0 \quad , \text{c. d. d.}$$

Così il teorema è dimostrato applicando il criterio b) del paragrafo precedente. Possiamo dimostrarlo ancora applicando invece il criterio a), nel modo seguente. Siano $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ n soluzioni indipendenti di $Af = 0$. Sostituendo nella (14) per f successivamente $f = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, avremo

$$(15) \qquad X\omega_i = \mu_1 X_1\omega_i + \mu_2 X_2\omega_i + \cdots + \mu_q X_q\omega_i$$

$$(i = 1, 2 \ldots n);$$

ma $X_1\omega_i, X_2\omega_i \ldots X_q\omega_i, X\omega_i$ sono altrettante soluzioni di $Af = 0$ e se proviamo che la matrice delle n equazioni lineari (15) rispetto alle q incognite $\mu_1 \ldots \mu_q$ ha precisamente la caratteristica q, sarà provato che le μ sono funzioni di soluzioni e quindi esse stesse soluzioni. Ora se la matrice

$$\left\| X_1\omega_i\,,\ X_2\omega_i \ldots\ldots X_q\omega_i \right\|$$

$$i = 1, 2 \cdots n$$

avesse una caratteristica $< q$ si potrebbero determina-

re q tali funzioni a_i delle x da soddisfare alle relazioni

$$a_1 X_1 \omega_i + a_2 X_2 \omega_i + \dots\dots + a_q X_q \omega_i = 0$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

e perciò l'equazione a derivate parziali

$$a_1 X_1 f + a_2 X_2 f + \dots\dots + a_q X_q f = 0,$$

ammettendo tutte le n soluzioni di $Af = 0$ sussisterebbe, contro l'ipotesi, un'identità della forma

$$a_1 X_1 f + \dots\dots + a_q X_q f = \rho Af$$

Notiamo in fine il teorema seguente:

4: Se l'equazione $Af=0$ ammette le due trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f$ ammetterà anche la trasformazione infinitesima alternata $(X_1 X_2)$.

La dimostrazione segue subito dal criterio a) § . . ovvero dal criterio b) applicando l'identità Jacobiana.

§ 148

Integrazione di un'equazione $Af=0$ di cui sia noto un certo numero di trasformazioni infinitesime

---

Servendoci dei risultati sopra stabiliti, veniamo ora a trattare la questione fondamentale seguente:

Data un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

(o un sistema differenziale (I)) e noto un certo numero di sue trasformazioni infinitesime, cercare le semplificazioni che se ne possono trarre per la integrazione della $Af=0$.

Se trasformazioni infinitesime note siano $X_1 f, X_2 f, \ldots\ldots X_q f$ e supponiamole senz'altro distinte rispetto alla $Af=0$; altrimenti le ridurremmo al minimo numero di trasformazioni distinte. Se costruendo le trasformazioni alternate

$$(X_i X_k) \qquad i, k = 1, 2 \ldots q.$$

che sono pure ammesse dalla $Af=0$ (teorema 4° del paragrafo precedente), ne troviamo qualcuna distinta dalle $X_1 f, X_2 f \ldots X_q f$ l'aggiungeremo alla precedente e così continueremo formando le nuove trasformazioni alternate e così via, finchè ci ridurremo, come è chiaro, al caso seguente.

Della $Af=0$ è noto un certo numero di trasformazioni distinte, diciamo ancora

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_q f,$$

tali che ogni trasformazione alternata

$$(X_i X_k) \qquad i, k = 1, 2 \ldots q$$

è una combinazione lineare omogenea

$$(16) \qquad \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots\ldots + \omega_q X_q f + \lambda A f$$

di $X_1 f, \ldots\ldots X_q f$, Af, le ω essendo soluzioni della $Af=0$ (teorema 3°).

Semplifichiamo ulteriormente le espressioni di $X_1 f, X_2 f \dots X_q f$ nel modo seguente – Supposto p. e. $\alpha_0 \neq 0$, sostituendo a ciascuna $X_i f$ una trasformazione equivalente

$$X_i f + \rho A f$$

possiamo ridurla a mancare del termine in $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ – Così le $X_1 f, X_2 f \dots X_q f$ avranno tutte la forma

$$X_i f = \sum_k^{1 \dots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \dots q)$$

e nelle espressioni alternate stesse $(X_i X_k)$ mancherà il termine in $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, cioè sarà nella (16) $\lambda = 0$, ossia

$$(X_i X_k) = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \dots + \omega_q X_q f$$

I coefficienti ω in queste espressioni alternate sono soluzioni della $Af = 0$, ovvero costanti. Se sono tutte costanti ciò significa che le $X_1 f, X_2 f \dots X_q f$ sono le trasformazioni generatrici di un gruppo G_q sulle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ nelle cui equazioni finite entra inoltre come parametro l'$(n+1)^{ma}$ variabile x_0 – In caso contrario, se le ω ci forniscono r soluzioni indipendenti della $Af = 0$ (soluzioni che si hanno senza alcuna integrazione) potremo servirci di queste soluzioni note per abbassare l'ordine del problema. Prendendo infatti queste r soluzioni come prime r variabili indipendenti $x'_0\, x'_1 \dots x'_{r-1}$, la Af si ridurrà ad

$$Af = \alpha'_2 \frac{\partial f}{\partial x'_2} + \dots + \alpha'_n \frac{\partial f}{\partial x'_n} = 0$$

e da un problema d'ordine n saremo ridotti ad un problema d'ordine $n-2$ – .

Così o abbassiamo l'ordine del sistema differenziale proposto o ci riduciamo alla questione seguente:

Della equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

si conoscono q trasformazioni infinitesime distinte

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad i = 1, 2 \dots q$$

che soddisfano alle condizioni

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\dots q} c_{iks} X_s f$$

colle c costanti, e generano quindi un gruppo G_q sulle n variabili $x_1\, x_2 \dots x_n$, contenente inoltre il parametro x_0; si deve utilizzare nel miglior modo la conoscenza di queste trasformazioni per la integrazione della $Af = 0$.

Un'ulteriore osservazione ci permette di ridurci al caso in cui il numero q di queste trasformazioni infinitesime è precisamente $= n$. Se infatti $q < n$ le $q+1$ equazioni

$$Af = 0, \; X_1 f = 0, \; X_2 f = 0 \dots X_q f = 0$$

hanno $n-q$ soluzioni comuni che si trovano integrando un sistema differenziale d'ordine $n-q$. Prendendo

queste $n-q$ soluzioni, insieme ad altre $q+1$ funzioni delle x, come nuove variabili indipendenti, ci riduciamo al caso di una equazione $Af=0$ a $q+1$ variabili di cui sono note q trasformazioni distinte.

§. 149
Equazioni $Af=0$ a gruppo G_n integrabile

Le considerazioni del paragrafo precedente riducono la questione al seguente problema normale:

È data l'equazione di $n+1$ variabili

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

e se ne conoscono n trasformazioni infinitesime distinte (*)

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

generatrici di un gruppo G_n - Si cercano le semplificazioni che la conoscenza di questo gruppo di trasformazioni permette di apportare al processo d'integrazione.

Cominciamo qui dal trattare il caso più semplice

(*) Ciò equivale a dire che il determinante delle ξ_{ik} non è nullo, che cioè G_n è transitivo.

in cui il gruppo G_n è integrabile secondo la denominazione introdotta al § 61. Dimostriamo allora che la integrazione della $Af=0$ si può ottenere eseguendo n quadrature. Con ciò resterà appunto giustificata, a questo riguardo, la denominazione di gruppi integrabili.

Il gruppo G_n essendo per ipotesi integrabile possederà un sottogruppo G_{n-1} invariante, esso stesso integrabile; poniamo per semplicità che sia

$$G_{n-1} \equiv [X_1 f, X_2 f \dots X_{n-1} f]$$

Le n equazioni ad $n+1$ variabili

$$(17) \qquad Af=0 \ , \ X_1 f=0 \ , \dots X_{n-1} f=0$$

formano un sistema completo che ha quindi una soluzione, diciamo u. Il sistema completo (17) ammette la trasformazione $X_n f$ ed è perciò $X_n u$ una funzione della sola u, scriviamo

$$X_n u = \theta(u)$$

Ma non può essere $X_n u = 0$ perchè le $n+1$ equazioni

$$Af=0 \ , \ X_1 f=0 \ , \dots\dots X_n f=0$$

sono indipendenti e non possono quindi avere una soluzione comune. Essendo adunque $\theta(u) \neq 0$, cangiando u in una sua funzione possiamo rendere

deve

$$X_n u = 1$$

Questa insieme colle

$$Au = 0 \ , X_1 u = 0 \ldots\ldots X_{n-1} = 0$$

forma un sistema di $n+1$ equazioni risolubile rispetto alle $n+1$ incognite

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} , \frac{\partial u}{\partial x_1} , \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

e si ha quindi u con una quadratura.

Dopo ciò facendo un cangiamento di variabili in cui u sia una delle nuove variabili, le nuove

$$\bar{A}f \ , \bar{X}_1 f \ldots \bar{X}_{n-1} f$$

non conterranno $\frac{\partial f}{\partial u}$ e della equazione a n variabili

$$\bar{A}f = 0$$

conosceremo le $n-1$ trasformazioni infinitesime distinte $\bar{X}_1 f \ldots \bar{X}_{n-1} f$ che generano ancora un gruppo G_{n-1} integrabile. Così ci troveremo nelle stesse condizioni di prima, cangiato però n in $n-1$.

Procedendo ora sulla $\bar{A}f = 0$ (dove la prima variabile u contenuta nei soli coefficienti si riguarda come parametro) come prima sulla $Af = 0$ si perviene evidentemente, dopo n quadrature, alla integrazione completa della $Af = 0$ c. d. d.

§ . 150

Riduzione di una equazione $Af=0$ a gruppo composto a successive equazioni a gruppi semplici

Senza supporre che il gruppo G_n, ammesso dalla $Af=0$, sia integrabile, supponiamo ora soltanto che sia un gruppo composto e sia

$$G_{n-n_1} \equiv [X_{n_1+1}f, X_{n_1+2}f \dots X_n f]$$

un suo sottogruppo invariante massimo.

Supponiamo inoltre che del gruppo G_n si conoscano le equazioni in termini finiti. Questa condizione non è veramente necessaria ed i risultati di Lie (Math. Annalen Bd 25) che ora andiamo a far conoscere in questa ipotesi sussistono ancora, come ha dimostrato Vessiot(*), supposte solo note le trasformazioni infinitesimali. Qui però ci limitiamo a trattare il caso indicato che basta per riconoscere quale relazione ha la composizione del gruppo G_n di $Af=0$ coi processi d'integrazione della equazione stessa.

Per semplificare la trattazione scriviamo la Af sotto la forma

(*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse t. 8 (1894).

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

rendendo, come è lecito, $\alpha_0 = 1$ — Le n trasformazioni generatrici di G_n avranno la forma

$$X_i f = \sum_k^{1 \ldots n} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

e staranno fra loro e colla Af nelle relazioni espresse dalle formole

$$(18) \qquad (X_i A) = 0 \quad , \quad (X_i X_k) = \sum_s^{1 \ldots n} c_{iks} X_s f$$

Le n_1+1 soluzioni del sistema completo

$$(19) \qquad X_{n_1+1} f = 0 \,,\; X_{n_1+2} f = 0 \,, \ldots \, X_n f = 0 \,,$$

invarianti di G_{n-n_1}, sono note senza integrazione poichè conosciamo di G_{n-n_1} le equazioni finite — Prendendo queste n_1+1 soluzioni, fra le quali figura x_0, come prime variabili

$$x_0 \quad x_1 \ldots\ldots x_{n_1} \,,$$

vediamo facilmente che tanto nella Af come nella $X_i f$ i coefficienti di

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \,,\, \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_{n_1}}$$

dipenderanno solo da $x_0\, x_1 \ldots x_{n_1}$ e non dalle rimanenti variabili

$$x_{n_1+1} \ldots\ldots x_n$$

Essendo infatti

$$(X_{n_1+i}\, A) f = 0 \,,$$

facendo qui $f = x_j$ $(j = 1, 2 \ldots n_1)$ viene

$$X_{n_1+i}(Ax_j) - A(X_{n_1+i}\, x_j) = X_{n_1+i}\,(Ax_j) = 0$$

e quindi Ax_j è una soluzione del sistema (19), e perciò una funzione delle soluzioni indipendenti $x_0\, x_1 \dots x_{n_1}$.

Il sottogruppo G_{n-n_1} essendo inoltre invariante in G_n si ha

$$(X_{n_1+i}\, X_k) = \gamma_1 X_{n_1+1}f + \gamma_2 X_{n_1+2} f + \dots + \gamma_{n-n_1} X_n f$$

colle γ costanti, e facendo in questa identità ancora

$$f = x_j \qquad (j = 1, 2 \dots n_1)$$

si ha

$$X_{n_1+i}(X_k x_j) = 0,$$

onde ancora

$$X_k x_j \qquad \begin{cases} k = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots n_1 \end{cases}$$

dipende solo da $x_0\, x_1 \dots x_{n_1}$ - Di più in

$$X_{n_1+1} f \,;\; X_{n_1+2} f, \dots X_n f$$

mancano affatto i termini in

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_{n_1}}$$

Potremo quindi scrivere $Af, X_1 f, X_2 f, \dots X_n f$ sotto la forma

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_k^{1\dots n_1} \alpha_k(x_0\, x_1 \dots x_{n_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_k^{n_1+1\dots n} \beta_k(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n_1} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_{n_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_k^{n_1+1\dots n} \eta_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$i = 1, 2 \dots n,$$

Indichiamo ora con $A'f$, $X'_i f$ le espressioni che si

formano da Af, $X_i f$ sopprimendo i termini in

$$\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

cioè poniamo

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_k^{1\dots r_1} \alpha_k (x_0\, x_1 \dots x_{r_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$X'_i f = \sum_k^{1\dots r_1} \xi_{ik} (x_0\, x_1 \dots x_{r_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Se si ha riguardo alle relazioni (18) ed alla forma superiore di Af, $X_i f$, si vede subito che sussistono le relazioni

$$(X'_i A') = 0 \qquad (X'_i X'_k) = \sum_s^{1\dots r_1} c_{iks} X_s f$$

Le seconde ci dimostrano che le

$$X'_1 f,\ X'_2 f, \dots X'_{r_1} f$$

generano un gruppo G'_{r_1} e poichè i valori delle costanti di composizione sono i medesimi che quelli delle c_{iks} nelle (18) per

$$i, k, s = 1, 2, \dots r_1,$$

le osservazioni in fine del § 96 ci dimostrano che questo G'_{r_1} non è altro che il gruppo complementare $\frac{G_n}{G_{n-r_1}}$ del gruppo G_n rispetto al sottogruppo invariante G_{n-r_1} -

Essendo poi, come si è detto, $(X'_i A') = 0$, della equazione a derivate parziali con r_1+1 variabili $x_0\, x_1 \dots x_{r_1}$

$$A'f = 0$$

sappiamo che ammette il gruppo G'_{r_1}, il quale è un gruppo semplice perchè G_{n-r_1} è invariante mas-

simo in G_n –

Di più è essenziale osservare che le

$$X'_1 f \dots X'_n f$$

non sono legate da alcuna relazione, poichè in caso contrario sarebbe nullo il determinante dei loro coefficienti, e come subito si vede, sarebbe conseguentemente pur nullo il determinante dei coefficienti delle primitive

$$X_1 f,\ X_2 f, \dots X_n f,$$

che contiene il precedente determinante come fattore – Così la $A'f = 0$ è in condizioni analoghe alla primitiva $A'f = 0$, il gruppo G_n essendo sostituito da G'_{n_1} –

Supponiamo di avere integrata questa equazione ad $n_1 + 1$ variabili ed a gruppo semplice G'_{n_1} e vediamo come verrà conseguentemente ridotto il problema della integrazione della $Af = 0$ – Siano $x'_1\ x'_2 \dots x'_{n_1}$ le soluzioni, supposte ora note di $A'f = 0$ che sono altresì soluzioni di $Af = 0$, precisamente tutte e sole quelle che sono funzioni di

$$x_0\ x_1 \dots x_n$$

Sostituiamo a queste prime $n_1 + 1$ variabili come nuove variabili

$$x_0\ x'_1\ x'_2 \dots x'_n$$

e la $Af=0$ prenderà la forma

$$\bar{A}f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_{k}^{n_1+1 \ldots n} \beta_k (x_0\, x_1'\, x_2' \ldots x_{n_1}'\, x_{n_1+1} \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

mentre le trasformazioni infinitesime

$$X_{n_1+1}f\,,\ X_{n_1+2}f \ldots\ldots X_n f$$

danno luogo ad un gruppo G_{n-n_1} ammesso dalla $\bar{A}f=0$ e nel quale le variabili

$$x_0\ x_1'\ x_2' \ldots x_{n_1}'$$

figurano solo come parametri nei coefficienti. La integrazione della $Af=0$ è così ridotta a quella della

$$\bar{A}f=0$$

con $n-n_1+1$ variabili $x_0, x_{n_1+1} \ldots x_n$ e con un gruppo noto G_{n-n_1} di trasformazioni, che è precisamente il sottogruppo invariante di G_n da cui siamo partiti.

Per tal modo la integrazione della $Af=0$ con $n_{\cdot\cdot}$ variabili col gruppo G_n è ridotta alla integrazione successiva delle due seguenti equazioni, 1° all'integrazione della

$$A'f=0$$

con n_1+1 variabili col gruppo semplice G'_{n_1}, $\frac{G_n}{G_{n-n_1}}$ complementare di G_n rispetto al sottogruppo invariante massimo G_{n-n_1}; 2° alla integrazione della $\bar{A}f=0$ con $n-n_1+1$ variabili, e col gruppo G_{n-n_1}.

Sulla $\bar{A}f=0$ possiamo poi procedere nello stesso modo e supposto che sia $G^{\gamma}_{n-n_1-n_2}$ un sottogruppo invariante

te massimo di G_{n-n_1} potremo sostituire all'integrazione della $Af=0$, la successiva integrazione d'una equazione ad n_1+1 variabili col gruppo G'_{n_1} complementare di G_{n-n_1} rispetto al sottogruppo invariante $G_{n-n_1-n_2}$, indi l'integrazione di un'equazione ad $n-n_1-n_2+1$ variabili col gruppo $G_{n-n_1-n_2}$ –
Così proseguendo arriviamo evidentemente al teorema finale seguente:

Se l'equazione

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x_0}+\sum_1^{1\ldots n}\alpha_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$$

ad $n+1$ variabili ammette il gruppo (transitivo) G_n generato dalle

$$X_if=\sum_k^{1\ldots n}\xi_{ki}(x_0 x_1\ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$i=1,2\ldots n$$

ed è

$$G_n\quad G_{n-n_1}\quad G_{n-n_1-n_2}\quad G_{n-n_1-n_2-n_3}\;\ldots\ldots 1$$

una serie di composizione di G_n, l'integrazione della $Af=0$ si può ridurre alla successiva risoluzione di equazioni ausiliarie della stessa specie rispettivamente con

$$n_1+1\;,\;n_2+1\;,\;n_3+1\;,\ldots\ldots$$

variabili e coi rispettivi gruppi semplici

$$\frac{G_n}{G_{n-n_1}}\;,\;\frac{G_{n-n_1}}{G_{n-n_1-n_2}}\;\ldots\ldots$$

Questa riduzione di un'equazione $Af=0$ a gruppo

composto a successive equazioni a gruppi semplici ha perfetta analogia con quella che nella teoria delle equazioni algebriche si effettua per un'equazione a gruppo di Galois composto, riducendola alla risoluzione di successive equazioni ausiliarie a gruppi di Galois semplici.

I teoremi di Jordan e Hölder, estesi da Lie ed Engel ai gruppi continui (§§ 66, 97), acquistano ora, in queste teorie d'integrazione, il significato seguente che, comunque si effettui la riduzione della $Af=0$, variando la serie di composizione di G_n, il numero delle variabili nelle successive equazioni ausiliarie ed i loro gruppi rimangono sempre gli stessi.

§ 151

I moltiplicatori di Jacobi di una equazione $Af=0$

Intimamente legati colle trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots \dots + \alpha_n(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

sono i così detti moltiplicatori di Jacobi, dei quali andiamo ora a trattare.

Siano $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1}$ $n-1$ soluzioni indipendenti di $Af=0$; l'equazione

$$\frac{\partial(f,\omega_1,\omega_2\cdots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\cdots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ha tutte le soluzioni di $Af=0$ ed il suo primo membro non differisce quindi dall'espressione Af che per un fattore M, funzione di $x_1\ x_2 \dots x_n$ — Si ha quindi un'identità della forma

$$M.\,Af = \frac{\partial(f,\omega_1,\omega_2\cdots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)};$$

questo fattore M dicesi appunto un moltiplicatore di Jacobi dell'equazione a derivate parziali, ovvero del sistema differenziale equivalente

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

Naturalmente cangiando le soluzioni fondamentali $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1}$, cangia il moltiplicatore M, ed ora appunto studieremo le relazioni che passano fra i diversi moltiplicatori.

Intanto cominciamo dal dimostrare il teorema.

Ogni moltiplicatore M soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(21) \qquad \frac{\partial(M\alpha_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(M\alpha_2)}{\partial x_2}+\cdots\cdots+\frac{\partial(M\alpha_n)}{\partial x_n}=0$$

ovvero

$$(21^*) \qquad \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M}{\partial x_i} = -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

Infatti dall'identità (20) risulta:

$$(21^*)\quad \begin{cases} M\alpha_1 = \dfrac{\partial(x_1,\omega_1,\omega_2\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\dots\dots x_n)} = \dfrac{\partial(\omega_1,\omega_2\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_2,x_3\dots\dots x_n)} \\ M\alpha_2 = \dfrac{\partial(x_2,\omega_1,\omega_2\dots\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\dots x_n)} = -\dfrac{\partial(\omega_1,\omega_2\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_3\dots x_n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M\alpha_n = \dfrac{\partial(x_n,\omega_1,\omega_2\dots\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\dots\dots x_n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{\partial(\omega_1,\omega_2\dots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\dots x_{n-1})} \end{cases}$$

Formando il primo membro della (21) e ponendo insieme i determinanti che contengono le medesime derivate seconde delle ω si vede subito che due a due si distruggono.

Si osserverà che nel caso $n=2$ la (21) esprime che

$$M(\alpha_2 dx_1 - \alpha_1 dx_2)$$

è un differenziale esatto, cioè M è un ordinario moltiplicatore euleriano, o fattore integrante di $\alpha_2 dx_1 - \alpha_1 dx_2$.

Dimostriamo ora successivamente le seguenti proprietà dei moltiplicatori.

1) Il quoziente $\frac{M}{M'}$ di due moltiplicatori è una soluzione di $Af=0$.

E infatti, soddisfacendo M, M' alla (21), sottraendo e

corrispondenti relazioni si ottiene

$$\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{M}{M'}\right)=0$$

Risulta da quanto precede che se M è un moltiplicatore, ogni altro moltiplicatore ha la forma $M\omega$, essendo ω una soluzione di $Af=0$ - Ma anche viceversa

3) Se M è un moltiplicatore ed ω una soluzione qualunque di $Af=0$, sarà anche $M'=M\omega$ un moltiplicatore.

E infatti si ha

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M'}{\partial x_i} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M}{\partial x_i} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log \omega}{\partial x_i} =$$

$$= -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

Da queste proprietà si deduce facilmente:

4) Ogni soluzione M della (21) o (21*) è un moltiplicatore - Infatti se M' è un particolare moltiplicatore, esso soddisfa alla (21*) e perciò $\frac{M}{M'}$ alla $Af=0$, cioè è una soluzione ω, quindi $M=M'\omega$ è un moltiplicatore -

Osserviamo infine il modo come si comportano i moltiplicatori per un cangiamento di variabili - Esso è dato dal teorema seguente:

5) Se cangiando le variabili $x_1\, x_2 \dots x_n$ in $x'_1\, x'_2 \dots x'_n$ si cangia Af in $A'f$ ed M è un moltiplicatore di Af, sarà

$$M' = \frac{M}{\frac{\partial(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)}}$$

un moltiplicatore di $A'f$ –

Si ha per ipotesi, tenendo conto delle relazioni fra le x e le x'

$$Af = A'f\,;$$

ora

$$M.Af = \frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\, x_2 \cdots x_n)} = \frac{\partial(f, \omega_1 \cdots \omega_{n-1})}{\partial(x'_1\, x'_2 \cdots x'_n)} \cdot \frac{\partial(x'_1\, x'_2 \cdots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \cdots x_n)}$$

dunque

$$M'.A'f = \frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_{n-1})}{\partial(x'_1\, x'_2 \cdots x'_n)}$$

ciò che dimostra il teorema –

Supponiamo ora di conoscere della $Af = 0$ un moltiplicatore M ed r soluzioni indipendenti

$$\omega_1\ \omega_2 \cdots \omega_r$$

Prendendo per r prime variabili

$$x'_1 = \omega_1\,,\ x'_2 = \omega_2 \ \dots\dots\ x'_r = \omega_r$$

e cangiando comunque le altre, la Af si trasformi in

$$A'f = \alpha'_{r+1}\frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} + \dots\dots + \alpha'_n \frac{\partial f}{\partial x'_n}$$

e della $A'f$ conosceremo, pel teorema precedente, un moltiplicatore $M' = \dfrac{M}{\frac{\partial(x'_1\, x'_2 \cdots\cdots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \cdots x_n)}}$ –

Se supponiamo dunque $r = n-2$, la $A'f = 0$ sarà a due variabili e, conoscendone un moltiplic-

re, l'integrazione si compirà con una quadratura.

Dunque: Se di un' equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

si conoscono tutte le soluzioni, tranne una, ed un moltiplicatore, si troverà con una quadratura la soluzione mancante.

È questo il principio dell'ultimo moltiplicatore di Jacobi, che si applica principalmente nell'integrazione dei problemi di dinamica.

§. 152

Relazioni fra i moltiplicatori e le trasformazioni infinitesime

Della equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

supponiamo di conoscere le $n-1$ trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum_k^{1 \ldots n} \xi_{ik}(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

indipendenti fra loro e dalla Af (§ 147).

Il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \cdots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

è dunque diverso da zero, e noi vogliamo provare che l'inversa di questo determinante è un moltiplicatore di Af

Se costruiamo infatti il prodotto

$$\Delta \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} = \Delta \times \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

colla regola di moltiplicazione dei determinanti troviamo

$$\Delta \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} = \begin{vmatrix} A\omega_1 & A\omega_2 & \dots & A\omega_{n-1} & \alpha_n \\ X_1\omega_1 & X_1\omega_2 & \dots & X_1\omega_{n-1} & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}\omega_1 & X_{n-1}\omega_2 & \dots & X_{n-1}\omega_{n-1} & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_n \cdot \begin{vmatrix} X_1\omega_1 & X_1\omega_2 & \dots & X_1\omega_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}\omega_1 & X_{n-1}\omega_2 & \dots & X_{n-1}\omega_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ma il secondo fattore nel secondo membro è una funzione di soluzioni di $Af = 0$ e perciò una soluzione Ω; si ha dunque

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} \cdot \Omega$$

Ora per l'ultima delle (21*)

$$\frac{1}{\alpha_n}\frac{\partial(\omega_1,\omega_2\cdots\omega_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\cdots x_{n-1})}$$

è un moltiplicatore, ed essendo Ω una soluzione di $Af=0$, anche $\frac{f}{\Delta}$ è un moltiplicatore c.d.d. –

Dunque: Se l'equazione

$$Af=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

ammette le n-1 trasformazioni infinitesime

$$X_if=\sum_k^{1\cdots n}\xi_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

ed il determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \cdots & \xi_{n-1,n}\end{vmatrix}$$

non è nullo, la sua inversa $M=\frac{1}{\Delta}$ è un moltiplicatore di Af

Per n = 2 il teorema ora dimostrato dà, come caso particolare, il teorema A) del §. 141 -

Supponiamo ora soltanto di conoscere un moltiplicatore M ed una trasformazione infinitesima Xf della Af e dimostriamo come se ne potrà dedurre, in certi casi, la conoscenza di una soluzione della $Af=0$

Siccome la $Af=0$ ammette la Xf, avremo l'identi-

tà (§. 146).

$$(XA) = \lambda Af \qquad (22)$$

che ci dà

$$X\alpha_i - A\xi_i = \lambda\alpha_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ovvero

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \sum_k \xi_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} + \lambda\alpha_i = 0$$

Derivando questa rapporto a x_i e sommando rispetto ad i ottemiamo

$$A\left(\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right) - X\left(\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) + \lambda \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + A\lambda = 0 \qquad (23)$$

D'altronde nella identità (22) poniamo

$$f = \log M$$

e rammentiamo che per la (21*)

$$A(\log M) = -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

ne deduciamo

$$X\left(\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) + AX(\log M) = \lambda \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i},$$

indi sommando con la (23)

$$A\left\{X(\log M) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \lambda\right\} = 0$$

Questa formola ci dà il teorema:

Se la $Af = 0$ ha il moltiplicatore M ed ammette la trasformazione infinitesima Xf, per modo che

$$(XA) = \lambda Af,$$

l'espressione

$$X(\log M) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \lambda$$

sarà una soluzione di $Af=0$, ovvero una costante.

Nella prima ipotesi la conoscenza di un moltiplicatore v di una trasformazione infinitesima basta a dedurne una soluzione della $Af=0$

§. 153

Integrazione delle equazioni $Af=0$ a tre variabili, con una trasformazione infinitesima nota

---

Le ricerche dei §§. 148 - 150 ci hanno fatto conoscere i principii generali per la riduzione del problema di integrazione della $Af=0$, in un numero qualunque di variabili, quando ne siano note delle trasformazioni infinitesime -

Per lo studio delle equazioni differenziali di 2° ordine con date trasformazioni infinitesime ci è necessario approfondire queste ricerche pel caso in cui l'equazione $Af=0$ sia a tre variabili x, y, z -

Scriviamo la $Af=0$ sotto la forma

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}+\beta(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

e trattiamo nel presente paragrafo il caso in cui ne sia nota una trasformazione infinitesima essenziale Xf (non proporzionale alla Af) -

Possiamo assumere la Xf già ridotta alla forma (§. 150)

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial y} + \eta\frac{\partial f}{\partial z}$$

essendo ξ, η funzioni note di x, y, z. Si avrà per ipotesi

$$(XA) = 0$$

e quindi il sistema

$$Af = 0 \quad , \quad Xf = 0$$

è Jacobiano e possiede una soluzione $\varphi(x, y, z)$.
Questa si trova applicando il metodo di Mayer (o di Du-Bois Reymond), integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine. Supponiamo eseguita questa integrazione e trovata quindi la $\varphi(x y z)$, che dovrà certamente contenere almeno una delle due variabili y, z, poniamo p. e. la z. Cangiando le variabili x, y, z in x, y, φ le Af, Xf diventeranno

$$\begin{cases} A_1 f = \alpha_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ X_1 f = \xi_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

e poiché $(X_1 A_1) = 0$ l'equazione

$$\alpha_1 dy - \beta_1 dx = 0$$

associata alla $Af = 0$ avrà il fattore integrante (§ 141)

$$\frac{1}{\alpha_1\eta_1 - \beta_1\xi_1}$$

e quindi

$$\psi = \int \frac{\alpha_1 dy - \beta_1 dx}{\alpha_1 \eta_1 - \beta_1 \xi_1} = \psi(x, y, \varphi).$$

dove nella integrazione φ figura come parametro, darà la soluzione di $A_1 f = 0$ – Ponendo entro ψ per φ la sua espressione per x, y, z si avrà dunque la seconda soluzione di $Af = 0$

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Se un'equazione a derivate parziali

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \beta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

possiede una trasformazione infinitesima (essenziale) nota, la sua integrazione si effettua integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine ed eseguendo successivamente una quadratura.

§ 154

Caso in cui della $Af = 0$ si conoscono due trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f$

Supponiamo che della

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y} + \beta\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

si conoscano due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f \quad , X_2 f$$

che supponiamo naturalmente non legate alla Af da una relazione della forma

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f + \rho A f = 0$$

con c_1, c_2 costanti e $\rho = \rho(x, y, z)$ - Dimostriamo allora che se fra $X_1 f, X_2 f, Af$ non sussiste alcuna relazione lineare, a coefficienti variabili, l'integrazione della $Af = 0$ si effettua con due quadrature al massimo, mentre se una tale relazione sussiste occorrerà al massimo l'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine -

a) Consideriamo ora il primo caso, ed in primo luogo riduciamo, come nel paragrafo precedente, le $X_1 f, X_2 f$ a non contenere $\frac{\partial f}{\partial x}$, cioè alla forma

$$(23^*) \quad \begin{cases} X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial z} \\ X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} ;$$

l'ipotesi fatta equivarrà a dire che il determinante $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ è diverso da zero -

Costruendo l'espressione alternata $(X_1 X_2)$, questa si comporrà certo colle X_1, X_2 secondo una formola

$$(24) \qquad (X_1 X_2) = \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f$$

e le μ saranno pel teorema terzo al § 147 o soluzioni della $Af = 0$ o costanti - Saranno pure soluzioni della $Af = 0$ o costanti le funzioni

$$X_1 \mu_1, \ X_1 \mu_2, \ X_2 \mu_1, \ X_2 \mu_2$$

Se fra le quattro precedenti e $\mu_1\ \mu_2$ esistono due effettive soluzioni indipendenti di $Af=0$, è compiuta l'integrazione senza alcuna quadratura.

Quando ne esista una sola, potremo ricorrere al teorema del § 152 che, essendo note le due trasformazioni infinitesime X_1f, X_2f di Af ci fornisce un moltiplicatore

$$M = \frac{1}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}$$

e, pel teorema alla fine del § 151, conoscendo una soluzione ed un moltiplicatore, si troverà la seconda soluzione con una quadratura (*).

Resta in fine da considerare il caso in cui nella (24) μ_1, μ_2 risultino costanti. Allora X_1f, X_2f generano un gruppo G_2 ammesso dalla $Af=0$; e

(*) Senza ricorrere alla teoria dei moltiplicatori di Jacobi si può procedere anche nel modo seguente. Essendo già nota una soluzione φ, conosciamo anche di Af la trasformazione infinitesima

$$Uf = X_2\varphi X_1f - X_1\varphi X_2f$$

ed il sistema $Af=0$, $Uf=0$ ha la soluzione nota φ. Ci troviamo allora nel caso del §. precedente dopo avere già integrato la equazione del 1° ordine e basta quindi una successiva quadratura.

poichè un G_2 a due parametri è sempre integrabile (§.76), il risultato generale ottenuto al §149 ci dimostra che la $Af=0$ si integrerà con due quadrature.

Osserviamo qui di più che se il gruppo G_2 è Abeliano le due quadrature saranno indipendenti, mentre nel caso contrario porteranno l'una sull'altra.

E infatti se G_2 è Abeliano cioè

$$(X_1X_2)=0$$

possiamo prendere, applicando il processo del §.149, come sottogruppo invariante di G_2, sia X_1f, sia X_2f e conseguentemente determinare con una quadratura una soluzione φ dalle equazioni

$$(35) \qquad A\varphi=0\,,\ X_1\varphi=0\,,\ X_2\varphi=1$$

ed una seconda ψ con una seconda quadratura indipendente dalla prima da

$$A\psi=0\,,\ X_1\psi=1\,,\ X_2\psi=0\,,$$

e le due soluzioni φ, ψ saranno certo indipendenti fra loro -

Quando al contrario G_2 non è Abeliano si può supporre p. e.

$$(X_1X_2)=X_1f$$

e la prima soluzione φ si determina ancora con una quadratura dalla (35) - Successivamente il pr

caso del § 149 dà la seconda soluzione φ con una nuova quadratura, ma questa porta su quella già eseguita per trovare φ.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nel teorema:

Se una equazione a tre variabili

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ammette due note trasformazioni infinitesime, non legate alla Af da alcuna relazione lineare, l'integrazione della $Af = 0$ richiede al massimo due quadrature.

b) Veniamo ora a trattare il secondo caso in cui nelle (28*) $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$ _ Si ha per ciò

$$X_2 f = \varphi . X_1 f$$

ed il coefficiente φ è una soluzione di $Af = 0$ (non una costante). Insieme a φ è anche una soluzione $X_1 \varphi$; onde se $X_1 \varphi$ non è funzione di φ la $Af = 0$ è già integrata completamente senza quadrature.

Poniamo ora che $X_1 \varphi$ sia funzione di φ, e supposto p. e. che φ contenga z, prendiamo per variabili x, y, φ; risulterà

$$\overline{A}f = \alpha_1 (x, y, \varphi) \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 (x, y, \varphi) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\overline{X}_1 f = \xi_1 (x, y, \varphi) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 (x, y, \varphi) \frac{\partial f}{\partial y} + X_1 \varphi . \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Ora se $X_1 \varphi = 0$ siamo ridotti ad integrare la $\overline{A}f = 0$ a

due variabili x, y colla trasformazione infinitesima nota

$$\overline{X}_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y},$$

la variabile y comparendo solo come parametro. Basterà dunque al solito una quadratura

$$\varphi = \int \frac{\alpha_1 dy - \beta_1 dx}{\alpha_1 \eta_1 - \beta_1 \xi_1}$$

per compiere l'integrazione di $\overline{A}f = 0$ -

In caso contrario (quando cioè $\overline{X}_1 \varphi \neq 0$), non significa dire altro che il problema è ridotto ad integrare la $\overline{A}f = 0$ a due variabili, cioè un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine

Cosi: Se della

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono due trasformazioni infinitesime distinte $X_1 f, X_2 f$ legate alla Af da una relazione lineare, la $Af = 0$ si integrerà secondo i casi o senza quadrature, o con una quadratura o, nel caso più sfavorevole, integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine.

Come si vede il vantaggio che si ottiene in questo ultimo caso sul caso del § 153 quando si supponeva nota una sola trasformazione, consiste solo nel risparmiare una quadratura -

§ 155

Criterio per riconoscere se un'equazione del 2° ordine $y'' = \omega(x, y, y')$ ammette un gruppo Xf

---

Veniamo ora alla considerazione delle equazioni differenziali d'ordine superiore che ammettono un gruppo di trasformazioni – Cominciamo da quelle di 2° ordine che, risolute rapporto alla derivata seconda y'', scriveremo

(26) $$y'' = \omega(x, y, y')$$

La ricerca fondamentale di cui dobbiamo in primo luogo occuparci è la seguente:

Come si riconosce se l'equazione differenziale ammette il gruppo G_1 ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesima

(27) $$Xf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad ?$$

Per risolverla basta procedere come al § 144 per le equazioni del 1° ordine e prolungare due volte il gruppo G_1 nel gruppo G_1'' che agisce sugli elementi del 2° ordine

$$x, y, y', y''$$

ed è generato dalla trasformazione infinitesima

Xf prolungata due volte è:

$$(28) \qquad X_1^{(2)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y''},$$

dove η_1, η_2 si calcolano, secondo le regole del § 119, dalle formole

$$(29) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{d\eta}{dx} - y'\dfrac{d\xi}{dx} \\ \eta_2 = \dfrac{d\eta_1}{dx} - y''\dfrac{d\xi}{dx} \quad (*) \end{cases}$$

I valori effettivi di η_1, η_2, scritti per disteso, sono:

$$(30) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}y'^2 \\ \eta_2 = \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \left(2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)y' + \left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)y'^2 - \\ \qquad - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}y'^3 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - 2\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - 3\dfrac{\partial\xi}{\partial y}y'\right)y'' \end{cases}$$

Ora affinchè un'equazione differenziale

$$\Omega(x, y, y', y'') = 0$$

ammetta il gruppo G_1, è necessario e sufficiente che considerando l'equazione stessa come un'equazione finita fra le variabili

$$x, y, y', y''$$

essa rappresenti, nell'S_4 generato da queste varia-

(*) Si ricordi che il simbolo $\frac{d}{dx}$ da applicarsi ad una funzione $f(x, y, y', \ldots)$ rappresenta derivazione totale rapporto ad x, cioè:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \cdots\cdots$$

bili, una varietà invariante rispetto al gruppo $G_1^{(2)}$.

Per i criterii generali stabiliti al § 44, sarà quindi necessario e sufficiente che l'espressione

$$X_1^{(2)}\Omega$$

si annulli identicamente in forza della $\Omega = 0$. Applicando il criterio al caso dell'equazione (26) risoluta rispetto ad y'', troviamo il teorema fondamentale:

Affinchè l'equazione differenziale del 2° ordine

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

ammetta il gruppo ad un parametro

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

è necessario e sufficiente che la relazione

$$\eta_2 - \xi \frac{\partial \omega}{\partial x} - \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} - \eta_1 \frac{\partial \omega}{\partial y'} = 0,$$

cioè

$$(A) \begin{cases} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x} - 3\frac{\partial \xi}{\partial y} y'\right)\omega - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} y'^3 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) y'^2 + \\ + \left(2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) y' + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial x} - \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} - \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \right. \\ \left. - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial \omega}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

sia identicamente soddisfatta in x, y, y', riguardate come indipendenti.

Molte volte riesce più utile dare a questo criterio

un'altra forma equivalente, alla quale perveniamo nel modo seguente. L'equazione differenziale del 2º ordine data è equivalente al sistema differenziale del 1º ordine

$$(31) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\omega(x,y,y')}$$

nelle tre variabili x, y, y'. Ora nello spazio di queste tre variabili il G_1 dato induce il gruppo ad un parametro generato dalla prima trasformazione prolungata

$$X_1^{(1)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'}$$

La condizione richiesta si può quindi anche esprimere così: che il sistema differenziale (31), ovvero la equazione a tre variabili associata

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x,y,y')\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

deve ammettere il gruppo $G_1^{(1)}$ generato da $X_1^{(1)}f$.

Per ciò è necessario e sufficiente che sussista una identità della forma

$$(X_1^{(1)}A) = \lambda Af \qquad (\lambda = \lambda(x,y,y'))$$

essendo λ un fattore conveniente di proporzionalità.

Calcolando effettivamente quest'ultima condizione coll'osservare che $Af = \frac{df}{dx}$, troviamo le tre

$$\frac{d\xi}{dx} = -\lambda$$

$$\eta_1 - \frac{d\eta}{dx} = \lambda y'$$

$$\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'}-\frac{d\eta_1}{dx}=\lambda\omega$$

Ma la seconda, per la prima delle (29), è una conseguenza della prima e l'ultima, eliminando λ, diventa

$$\eta_2-\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}-\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}-\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'}=0,$$

che è precisamente la (A) — Così è nuovamente dimostrato il teorema fondamentale.

§ 156

Massimo numero di trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione del 2° ordine

Il criterio testè stabilito per riconoscere se una data equazione del 2° ordine

$$y''=\omega(x,y,y')$$

ammette un gruppo ad un parametro dato

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

conduce anche a determinare, ove esistano, tutte le trasformazioni infinitesime ammesse da una data equazione di 2° ordine. Per ciò, essendo nota ω in funzione di x, y, y', dovremo determinare le funzioni incognite ξ, η di x, y in guisa che

la (A) risulti identicamente soddisfatta. Ora se, per fissare le idee, ammettiamo che ω considerata come funzione di y' sia sviluppabile in serie di potenze di y' (*)

$$(32)\qquad \omega = \theta_0 + \theta_1 y' + \theta_2 y'^2 + \theta_3 y'^3 + \ldots ,$$

dove i coefficienti θ sono funzioni note di x, y, dovremo ordinare il primo membro della (A) secondo le potenze di y' ed eguagliare a zero i coefficienti di queste varie potenze.

Così si ottengono altrettante equazioni a derivate parziali del 2° ordine, lineari ed omogenee rispetto a ξ, η. Ora si intende bene che, se $\omega(x, y, y')$ è qualunque, non sarà possibile soddisfare tutte queste equazioni, ciò che si pone fuori di dubbio considerando un caso particolare in cui le dette equazioni sono incompatibili, come p. e. assumendo

$$\omega = e^{y'} + xy \quad (**)$$

(*) Altrimenti svilupperemmo in serie di potenze di $y' - c$ (c costante)

(**) Per vederlo basta sostituire in (A) ed osservare che il coefficiente di $e^{y'}$ deve essere nullo. Si trova così facilmente che si ha di necessità

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

Così dunque, al contrario di quello che accade per le equazioni del 1° ordine:

Ogni equazione differenziale del 2° ordine non ammette, in generale, un gruppo di trasformazioni in sè medesima. — Lo stesso vale, a più forte ragione, per le equazioni differenziali d'ordine superiore.

Ma ritorniamo alla formazione delle equazioni a derivate parziali per le funzioni incognite ξ, η — Se sostituiamo nella (A) lo sviluppo (32) per ω, basta eguagliare a zero il termine indipendente da y' ed i coefficienti di

$$y', y'^2, y'^3$$

per dedurre le 4 equazioni del tipo seguente:

$$(B)\quad\begin{cases} \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = f_1\left(x, y, \xi, \eta, \dfrac{\partial\xi}{\partial x}, \dfrac{\partial\xi}{\partial y}, \dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right) \\ 2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = f_2\left(x, y, \xi, \eta, \dfrac{\partial\xi}{\partial x}, \dfrac{\partial\xi}{\partial y}, \dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right) \\ 2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = f_3(\text{- - - - - - - - - - - -}) \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = f_4(\text{- - - - - - - - - - - -}), \end{cases}$$

dove i secondi membri sono funzioni note degli argomenti

$$x, y : \xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}$$

e di più lineari omogenee negli ultimi 6.

Basta già l'esame di queste quattro equazioni

per assicurarsi che nell'integrale generale del nostro sistema di equazioni per ξ, η (supposto che vi si possa soddisfare) entrano soltanto costanti arbitrarie, che sono al massimo in numero di 8.

Se deriviamo infatti ciascuna delle quattro equazioni (B) rapporto ad x e ad y, vediamo subito che se ne deducono tutte le derivate terze di ξ, η, espresse (linearmente ed omogeneamente) per ξ, η e le loro derivate prime e seconde. Prendendo ξ, η e queste derivate per funzioni incognite abbiamo un sistema di equazioni ai differenziali totali in 12 funzioni incognite, al quale sono da associarsi le quattro equazioni (B) in termini finiti.

Il numero delle costanti arbitrarie nell'integrale generale sarà dunque al massimo

$$12 - 4 = 8 \qquad \text{c. d. d.}$$

Perchè questo massimo sia effettivamente raggiunto, bisogna:

1° che le successive equazioni (del 1° ordine) ottenute eguagliando a zero, nello sviluppo del 1° membro della (A), i coefficienti delle potenze di y' superiori alla terza siano tutte identità.(*)

(*) Ciò porta, come facilmente si vede, che ω deve essere un polinomio di 2° grado in y'.

2° che le (B) e le equazioni alle derivate parziali sopra ricordate formino un sistema completo di Mayer.

Nel prossimo paragrafo determineremo tutte le equazioni del 2° ordine per le quali questo accade.

Ora osserviamo come sia a priori evidente che se un'equazione differenziale (del resto di qualunque ordine) possiede una serie continua di trasformazioni, queste formano un gruppo. Nel caso nostro ciò risulta anche dall'osservare che se la equazione differenziale proposta ammette le due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, \quad X_2 f,$$

ammette anche l'alternata $(X_1 X_2)$, come segue dal teorema 4° al §. 147 e dalla proprietà osservata in fine al §. 113.

Abbiamo così dimostrato il teorema.

Se un'equazione differenziale del 2° ordine ammette una serie continua di trasformazioni in sè medesima, queste formano un gruppo continuo finito, che possiede al massimo 8 parametri.

§. 157

Equazioni differenziali del 2° ordine con un gruppo G_8

Resta ora a vedersi se il numero di 8 parametri, sopra trovato come massimo pel gruppo di un'equazione differenziale del 2° ordine, può essere effettivamente raggiunto. Che ciò sia lo dimostra l'esempio della semplice equazione differenziale

$$y''=0;$$

le sue linee integrali formano il sistema delle rette del piano che si trasforma in se stesso per il gruppo G_8 delle proiettività.

Del resto se determiniamo direttamente il gruppo dell'equazione differenziale $y''=0$, seguendo il metodo del paragrafo precedente, troviamo che le condizioni (necessarie e sufficienti) cui debbono soddisfare ξ, η sono date dalle equazioni del secondo ordine

$$(B^*)\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\,,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}$$

Queste, derivate rapporto ad x, y, dimostrano che tutte le derivate terze di ξ, η sono nulle, cioè ξ, η sono polinomi di 2° grado in x, y; le (B^*) danno poi per i valori

più generali di ξ, η

$$\xi = ax + by + c + dx^2 + exy$$

$$\eta = \alpha x + \beta y + \gamma + ey^2 + dxy$$

($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, d, e$ costanti) – Queste formole definiscono appunto la più generale trasformazione projettiva del piano –

È ben naturale che se nell'equazione differenziale $y''=0$ si fa un cangiamento qualunque di variabile indipendente e di funzione incognita, l'equazione differenziale trasformata ammetterà ancora un gruppo ad 8 parametri. Ma è notevole che inversamente: Ogni equazione differenziale del 2° ordine che ammette un gruppo ad 8 parametri è riducibile, con un opportuno cangiamento di variabili, alla forma $y''=0$.

Per dimostrarlo supponiamo di avere una tale equazione differenziale del 2° ordine con un gruppo G_8 di trasformazioni e vediamo quali conseguenze si possono trarre rispetto alla costituzione di questo G_8 dalle sue equazioni di definizione che sono le (B) del paragrafo precedente – Calcolando, secondo le regole del § 39, i numeri caratteristici ε per gli ordini delle trasformazioni infinitesime di G_8 abbiamo

$$\varepsilon_0 = 2 \qquad \varepsilon_1 = 4 \qquad \varepsilon_2 = 6$$

$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 0 \qquad \nu_2 = 4$$

indi

$$\tau_0 = 2 \ , \ \tau_1 = 4 \ , \ \tau_2 = 2 \ .$$

Vi sono dunque nel nostro G_8 quattro trasformazioni infinitesime del 1° ordine, colle quali non è possibile comporre trasformazioni d'ordine superiore. Dunque, pei risultati del § 114, il sottogruppo di stabilità di G_8 relativo ad un punto P_0 del piano trasforma le coordinate omogenee degli elementi lineari uscenti da P_0 secondo il gruppo lineare omogeneo Γ_4 su due variabili, indi il fascio degli elementi lineari stessi secondo il gruppo generale projettivo. Concludiamo istanto di qui, per quanto si è visto al § 122, che il nostro G_8 su due variabili x, y è primitivo. Dunque, con una trasformazione di variabili x, y, possiamo ridurre questo G_8 al gruppo generale proiettivo su x, y (§ 133), generato dalle trasformazioni infinitesimali

$$p, \ q; \ xp, \ yp, \ xq, \ yq, \ x^2p + xyq, \ xyp + y^2q.$$

Restano ora solo a trovarsi le equazioni differenziali del 2° ordine $y'' = \omega(x, y, y')$ che ammettono le singole trasformazioni infinitesime di questo gruppo. Perciò dovrà essere ω una tale funzione di x, y, y' che la (A) § 155 risulti soddisfatta ponendovi per ξ, η i coefficienti di una qualunque delle 8 trasformazioni

infinitesime. Ma basta già adoperare le prime quattro.

$$p,\ q\ ,\ xp,\ yp$$

per dedurre che sarà necessariamente $\omega=0$. E infatti dobbiamo fare successivamente

$$\xi=1,\quad \eta=0$$
$$\xi=0,\quad \eta=1$$
$$\xi=x,\quad \eta=0$$
$$\xi=y,\quad \eta=0$$

Le prime due, sostituite in (A), danno

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=0;$$

dunque ω è una funzione solo di y'. La terza dà

$$y'\frac{d\omega}{dy'}-2\omega=0$$

e la quarta

$$y'^2\frac{d\omega}{dy'}-3\omega y'=0$$

onde appunto $\omega=0$. Così è adunque dimostrato il teorema enunciato.

§ 158
Determinazione di tutte le equazioni differenziali del 2° ordine o d'ordine superiore che ammettono un dato G_1

Dato un gruppo G_1 ad un parametro, generato dalla

trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

ricerchiamo ora la forma più generale delle equazioni differenziali del 2° ordine

$$(33) \qquad \Omega(x, y, y', y'') = 0$$

che ammettono questo G_1 - La risoluzione di questo problema si fa in modo del tutto analogo a quello del §. 145 per le equazioni del 1° ordine.

Il gruppo $G_1^{(2)}$ prolungato due volte da G_1 ha la trasformazione infinitesima

$$X_1^{(2)} f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_{12} \frac{\partial f}{\partial y''}$$

e nello spazio S_4 delle variabili x, y, y', y'' la (33) deve rappresentare una varietà (ipersuperficie) invariante rispetto a $G_1^{(2)}$ - Essa è quindi o un luogo di ∞^2 traiettorie di $G_1^{(2)}$ o un insieme di punti invarianti -

Ma quest'ultimo caso si esclude subito poichè si suppone che la (33) contenga effettivamente y'' (cf. §145); dunque la (33) è nell'S_4 una varietà invariante di prima classe (§ 47) e per ciò essa si otterrà stabilendo una relazione fra i tre invarianti di $G_1^{(2)}$.

Ciò equivale a dire: Le equazioni differenziali del 2° ordine invarianti rispetto a G_1 si ottengono tutte eguagliando a zero un invariante differenziale del 2° ordine di G_1 -

Ora diciamo, come al § 145, u l'invariante assoluto di G_1, v l'invariante del 1° ordine, che si ottiene (come si è visto al § 145) con una quadratura, appena noto u; allora (§ 119) il più generale invariante differenziale del 2° ordine di G_1 sarà del tipo

$$f\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$$

Possiamo dunque concludere:

La più generale equazione differenziale del 2° ordine che ammette un gruppo G_1 generato da

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

ha la forma

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u, v),$$

dove Φ è una funzione arbitraria di due argomenti u, v; di questi il primo u è un invariante assoluto di $G_1^{(*)}$, il secondo v è l'invariante del 2° ordine che si calcola con una quadratura da u.

Così p. e. pel gruppo $Xf = \frac{\partial f}{\partial x}$ (o $x' = x + a$) abbiamo $u = y$, $v = y'$ e la più generale equazione del 2° ordine che ammette questo G_1 di traslazioni è

$$y'' = \psi(y, y')$$

Servendoci dei risultati ottenuti al § 119 per gli invarianti differenziali dei gruppi a due variabili

---

(*) o se si vuole l'integrale dell'equazione del 1° ordine $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$

un processo perfettamente analogo si applica alla ricerca delle equazioni d'ordine $m > 2$ che ammettono il gruppo G_1. Si giunge così al risultato finale:

Ogni equazione differenziale d'ordine m, che ammette il gruppo G_1 ha la forma

$$(\alpha) \qquad \frac{d^{m-1}v}{du^{m-1}} = \Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \cdots \frac{d^{m-2}v}{du^{m-2}}\right)$$

essendo u, v gli invarianti differenziali d'ordine 0 e 1 di G_1.

Di qui si vede che per integrare una tale equazione differenziale basta integrare l'equazione del 1º ordine $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta}$, ciò che dà u, o con una quadratura calcolare v, indi con operazioni algebriche si pone l'equazione data sotto la forma (α) - Integrata questa equazione d'ordine $m-1$ è noto v in funzione di u ed $m-1$ costanti arbitrarie ed una successiva quadratura dà y in funzione di x.

§ 159

Integrazione di un'equazione differenziale del 2º ordine con un noto G_1

Ritorniamo al caso particolare delle equazioni di 2º ordine per esaminare più da vicino quali vantaggi offre per l'integrazione la conoscenza di una o

più trasformazioni infinitesimali

$$X_1 f, X_2 f \dots X_r f$$

della equazione in sè stessa. Formando le loro espressioni alternate ed aggregandole alle trasformazioni date, se già non ne sono combinazioni lineari a coefficienti costanti, possiamo sempre ridurci al caso che quelle r trasformazioni generino un gruppo e sarà in ogni caso (§ 156) $r \leq 8$. Siccome poi qualunque gruppo a più di due parametri contiene sempre sottogruppi G_2 che si determinano algebricamente, basterà che trattiamo soltanto due casi e cioè che sia noto, per mezzo delle due trasformazioni infinitesime o un gruppo G_1 ad un parametro o un gruppo G_2 a due parametri dell'equazione.

Cominciamo qui dal trattare il primo caso e sia

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

la trasformazione infinitesima nota dell'equazione differenziale data

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

Ciò che abbiamo detto in generale alla fine del paragrafo precedente dimostrerebbe soltanto che si può ridurre l'integrazione della proposta, 1º ad integrare l'equazione del 1º ordine $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta}$, 2º ad una qua-

dratura, 3° all'integrazione di una seconda equazione del 1° ordine, 4° ad un'altra quadratura – Ma se applichiamo i risultati del § 153 facilmente vediamo che si può sostituire a queste operazioni l'integrazione di una sola equazione del 1° ordine ed una quadratura –

E infatti alla equazione del 2° ordine sostituiamo l'equazione a derivate parziali equivalente

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x,y,y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Di questa conosciamo, per quanto si è visto alla fine del § 155, la trasformazione infinitesima

$$X^{(1)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial \xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

prolungata una volta dalla Xf – Questa $X^{(1)}f$ è evidentemente speciale, cioè non può aversi

$$X^{(1)}f = \rho(x,y,y')\cdot Af$$

Secondo quanto abbiamo dimostrato nel § 153 basta dunque l'integrazione di un'equazione del 1° ordine equivalente, secondo il metodo di Mayer, al sistema completo

$$Af = 0 \quad , \quad X^{(1)}f = 0 \,;$$

indi una quadratura compie l'integrazione.

Così adunque: L'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine, di cui sia nota una trasformazione infinitesima, si riduce all'integrazione di una

equazione del 1° ordine e ad una successiva quadratura.

§. 160

Riduzione a forma normale dei gruppi Abeliani G_2 su due variabili

Per esaminare le ulteriori semplificazioni apportate dalla conoscenza di una seconda trasformazione infinitesima, che generi colla prima un gruppo G_2, conviene che facciamo una ricerca preliminare sulla riduzione dei gruppi G_2 del piano a forma normale. Queste forme normali si potrebbero già subito trarre dai risultati generali del Cap. precedente ove si sono determinati tutti i possibili tipi dei gruppi nel piano; ma il nostro scopo attuale è quello di determinare altresì le operazioni necessarie a questa riduzione.

Supponiamo dunque dato un G_2 sulle due variabili x, y per mezzo delle sue due trasformazioni infinitesime

$$\begin{cases} X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Dovremo distinguere due casi, secondo che il gruppo

G_2 è Abeliano o no; ed in ciascuno di questi casi suo distinguere a seconda della transitività od intransitività del gruppo.

a) Il gruppo G_2 sia Abeliano transitivo, cioè si abbia

$$(X_1 X_2) = 0 \quad , \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$$

Per il risultato generale al § 85, cangiando le variabili x, y in convenienti u, v potremo rendere

$$\bar{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial u} \quad , \quad \bar{X}_2 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

ed avere il gruppo sotto la forma normale

$$G_2 \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

Quali operazioni sono a ciò necessarie? Poichè dobbiamo avere

$$X_1 u = 1 \quad , \quad X_2 u = 0$$

e

$$X_1 v = 0 \quad , \quad X_2 v = 1$$

calcoliamo immediatamente le derivate parziali sia di u che di v rispetto ad x, y e si avranno quindi u, v con due quadrature indipendenti.

b) Il gruppo G_2 sia Abeliano intransitivo, cioè si abbia

$$(X_1 X_2) = 0 \qquad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$$

ossia

$$X_2 f = \rho X_1 f,$$

dove ρ è una funzione nota di x, y — Siccome

$$(X_1, X_2) = 0$$

segue di qua

$$X_1 \rho = 0,$$

vale a dire conosciamo la soluzione ρ di

$$X_1 f = 0$$

Assumiamo ρ come variabile u e prendiamo una tale seconda variabile v che risulti:

$$\overline{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

Così il gruppo G_2 sarà ridotto alla funzione normale

$$G_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial v}, u\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Quali operazioni sono a ciò necessarie? La nuova variabile u è già determinata senza integrazione. La seconda v deve determinarsi in guisa che risulti

$$X_1 v = \xi_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

per il che bisogna integrare il sistema

$$(\beta) \qquad \frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1} = \frac{dv}{1}$$

Ma essendo già noto l'integrale $u = c$ di

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1},$$

il calcolo di v si fa con una quadratura. Infatti

traendo per es. y da $u(x,y)=c$, si avrà con una quadratura

$$v=\varphi(x,c)+c'$$

e rimettendo per c, $u(x,y)$:

$$v=\psi(x,y)+c' \quad (*)$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel teorema:

Un gruppo Abeliano su due variabili si può ridurre alla forma normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

o all'altra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, u\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

secondo che il gruppo è transitivo o intransitivo. Per

(*) La stessa cosa si può anche esprimere così: l'integrazione di (β) equivale a quella dell'equazione a derivate parziali in tre variabili

$$\xi_1\frac{\partial F}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}=0;$$

ora di questa conosciamo la soluzione u ed il moltiplicatore

$$M=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\eta_1}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\xi_1},$$

onde l'altra soluzione si ha con una quadratura.

effettuare la trasformazione occorrono nel primo caso due quadrature (indipendenti), nel secondo una sola quadratura.

§ 161
Caso di un G_2 non Abeliano

Supponiamo ora che il dato G_2 non sia Abeliano; allora potremo supporre (§ 76) che abbia la composizione

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

Distinguiamo anche qui nuovamente il caso della transitività da quello della intransitività.

c) Sia G_2 di composizione $(X_1 X_2) = X_1 f$ e transitivo $(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \neq 0$ - Possiamo introdurre tali variabili u, v che sia

$$\bar{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

e se

$$\bar{X}_2 f = \xi \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \frac{\partial f}{\partial v},$$

a causa di $(\bar{X}_1 \bar{X}_2) = \bar{X}_1 f$, sarà

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = 1$$

cioè

$$\bar{X}_2 f = U \frac{\partial f}{\partial u} + (v + U_1) \frac{\partial f}{\partial v},$$

con U, U_1 funzioni della sola u - Cangiando il

parametro u potremo rendere $U=1$ (*) e mettendo $v+U_1$ al posto di v avremo

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}$$

Dunque possiamo ridurre qui il G_2 alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}$$

Resta da vedere con quali operazioni si potranno calcolare u, v. Ora dobbiamo avere

$$X_1 u = 0\ \ ,\ X_2 u = 1$$

onde u si calcola con una quadratura. In secondo luogo devo essere

$$X_1 v = 1\ \ ,\ X_2 v = v$$

onde risulta per v un'equazione lineare ai differenziali totali, e perciò anche v si ha con una quadratura, poiché delle due quadrature necessarie a trovare v una è quella stessa che dà u (**) –

(*) Si noti che non può essere $U=0$, altrimenti G_2 sarebbe intransitivo –

(**) Colla risoluzione effettiva si ha infatti

$$du = \frac{-\eta_1 dx + \xi_1 dy}{\Delta} \qquad (\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

$$dv = v\,du + \frac{\eta_2 dx - \xi_2 dy}{\Delta}\ ,$$

la quale ultima si può scrivere

d) Sia G_2 intransitivo e di composizione

$$(X_1 X_2) = X_1 f\,;$$

avremo

$$X_2 f = \rho X_1 f.$$

Si può ridurre al solito $X_1 f$, a

$$\bar{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

e però

$$\bar{X}_2 f = \rho \frac{\partial f}{\partial v}\,;$$

ma essendo

$$(\bar{X}_1 \bar{X}_2) = \bar{X}_1$$

segue

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 1\,,\ \rho = v + U$$

e cangiando v in $v + U$ possiamo rendere $U = 0$, in modo che $\rho = v$.

Il nostro G_2 si riduce dunque alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v}\,,\ v\frac{\partial f}{\partial v}$$

La nuova variabile v si calcola in termini finiti da $v = \rho$; la seconda u non deve soddisfare ad altra condizione che alla $X_1 u = 0$, onde per determinarla conviene integrare l'equazione del 1° ordine

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1}\,,$$

$$d(ve^{-u}) = e^{-u}\cdot\frac{\eta_1 dx - \xi_1 dy}{\Delta}$$

e dà v con una sola quadratura.

che dà le trajettorie del gruppo G_1 —

Concludiamo. Un gruppo non Abeliano G_2 su due variabili si può ridurre alla forma normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

od all' altra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, v\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

secondo che è transitivo o intransitivo. La riduzione si effettua nel primo caso con due quadrature successive, nel secondo integrando l'equazione differenziale del 1° ordine che dà le trajettorie del gruppo derivato.

§. 162

Integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine con un noto G_2

Veniamo ora al problema proposto nel §159 e supponiamo che della equazione differenziale del 2° ordine

$$(\gamma) \qquad y'' = \omega(x, y, y')$$

ci siano note le due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

generatrici di un gruppo G_2. Dimostreremo che

in ogni caso l'integrazione della proposta (γ) si ottiene effettuando al massimo due quadrature.

L'integrazione della (γ) equivale a quella dell'equazione a derivate parziali a tre variabili x, y, y' –

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Di questa conosciamo due trasformazioni infinitesime e così le prolungate di $X_1 f$, $X_2 f$:

$$\begin{cases} X_1^{(1)} f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ X_2^{(1)} f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial f}{\partial y'} \end{cases}$$

Secondo i risultati del § 157, quando fra Af, $X_1^{(1)} f$, $X_2^{(1)} f$ non sussista alcuna identità lineare occorrono al massimo due quadrature per l'integrazione, ed è dimostrato quanto sopra abbiamo asserito.

Resta dunque solo da considerarsi il caso che le date trasformazioni

$$X_1 f, \ X_2 f$$

siano tali da avere per conseguenza una relazione lineare fra Af, $X_1^{(1)} f$, $X_2^{(1)} f$, cioè da annullare (identicamente in x, y, y') il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y' & \omega(x, y, y') \\ \xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} y'^2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi_2}{\partial y} y'^2 \end{vmatrix}$$

In primo luogo osserviamo che se il

$$G_2 \equiv (X_1 f, X_2 f)$$

e' intransitivo ciò non è possibile - In tal caso si ha infatti

$$X_2 f = \rho X_1 f = \qquad (\rho = \rho(x,y))$$

$$\xi_2 = \rho \xi_1 \qquad \eta_2 = \rho \eta_1$$

e il determinante Δ diventa

$$\Delta = (\eta_1 - \xi_1 y')\left\{\eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) y' - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} y'^2\right\}.$$

Il primo fattore certamente non si annulla perchè ξ_1, η_1 non sono insieme nulli - Perchè si annullasse il secondo, dovrebbe aversi

$$\eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$

ossia ρ costante ciò che è escluso, la $X_2 f$ essendo distinta dalla $X_1 f$.

Dobbiamo ora dunque ricercare soltanto se può annullarsi Δ quando G_2 sia transitivo.

Distinguiamo per ciò secondo che G_2 è Abeliano o no - Nel primo caso si può con due quadrature ridurre il gruppo alla forma normale (§ 160)

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$$

ed il determinante relativo Δ diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \omega(u,v,v') \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \omega(u,v,v');$$

perciò l'equazione differenziale si riduce alla semplice

$$v'' = 0$$

Dunque la proposta risulta integrata colle due quadrature che danno u, v.

Nel secondo caso si può ancora (§ 161) ridurre con due quadrature il G_2 alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v},$$

dopo di che Δ diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \omega(v,v,v') \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & v & v' \end{vmatrix} = v' - \omega,$$

onde $\omega = v'$. Colle due quadrature che danno u, v si riduce dunque l'equazione differenziale alla forma

$$v'' = v'$$

coll'integrale generale

$$v = ae^u + b$$

Possiamo dunque enunciare il teorema finale:

Se di un'equazione differenziale del 2° ordine sono note due trasformazioni infinitesime distinte

che generano un gruppo G_2, la sua integrazione si effettua con due quadrature.

Si può aggiungere, per quanto si è visto, che i due quadrature sono indipendenti quando il gruppo è Abeliano.

Capitolo XII°

Applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari - Estensione delle teorie di Galois secondo Picard e Vessiot.

§. 163

Criterio per la dipendenza lineare di più funzioni.

Come già abbiamo detto al §139, è oggetto di quest'ultimo capitolo del corso l'esposizione delle ricerche di Picard e Vessiot sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, che danno l'estensione a questo campo delle teorie di Galois per le

equazioni algebriche - Per altro la nostra esposizione dovrà necessariamente limitarsi ai principii della teoria -

Ci converrà prima ricordare alcune proprietà fondamentali delle equazioni differenziali lineari. Indichi t una variabile indipendente e x una funzione incognita di essa, che debba soddisfare ad una data equazione differenziale lineare ed omogenea d'ordine m:

$$(1) \qquad x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} x' + p_m x$$

$$\left(x' = \frac{dx}{dt},\ x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots x^{(m)} = \frac{d^mx}{dt^m}\right)$$

dove i coefficienti p sono assegnate funzioni di t. Diciamo subito che qui noi adottiamo il punto di vista delle variabili complesse, e cioè pensiamo t come variabile complessa, la x come funzione (analitica) incognita di essa, e $p_1, p_2 \ldots p_m$ come funzioni (analitiche) date di t. Del resto la massima parte delle considerazioni seguenti varrebbero ancora limitandosi al campo reale.

I teoremi generali d'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ci accertano che se $t = t_0$ è un punto regolare pei coefficienti p, esiste un integrale x della (1) tale che per $t = t_0$ esso e le sue prime $m-1$ derivate assumono valori

prefissati ad arbitrio:

$$x_0,\ x_0',\ x_0'' \dots x_0^{(m-1)}$$

Anzi, nel caso nostro delle equazioni lineari, è noto che se i coefficienti p sono finiti, continui e monodromi entro un certo cerchio col centro in $t=t_0$, anche l'integrale x sarà certamente regolare (finito, continuo e monodromo) entro il medesimo cerchio. Ora se abbiamo un certo numero r di integrali particolari della (1)

$$(2) \qquad x_1,\ x_2 \dots x_r,$$

sarà pure un integrale ogni loro combinazione lineare omogenea

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r$$

a coefficienti costanti. Diciamo poi che gli r integrali (2) sono linearmente indipendenti quando non sussiste fra di essi alcuna relazione della forma

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = 0,$$

colle c costanti. Occorre in primo luogo stabilire un criterio per riconoscere, dato un certo numero r di funzioni

$$x_1,\ x_2 \dots x_r$$

di una variabile (complessa) t se queste r funzioni sono linearmente dipendenti. La questione si

può riportare immediatamente al computo del numero dei parametri essenziali e nella espressione lineare

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r ;$$

le considerazioni del § 2 dimostrano infatti che se le $x_1\ x_2 \dots x_r$ subiscono $r-\rho$ relazioni lineari omogenee indipendenti, il numero dei parametri essenziali e nella F si riducranno precisamente a ρ. Dal criterio generale stabilito al § 3 segue ora facilmente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le r funzioni $x_1\ x_2 \dots x_r$ di t siano linearmente dipendenti è che si annulli il determinante (Wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \dots\dots x_1^{(r-1)} \\ x_2 & x_2' & x_2'' \dots\dots x_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_r & x_r' & x_r'' \dots\dots x_r^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (*)$$

E infatti, se W non si annulla, le successive caratteristiche $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ delle matrici $M, M_1, M_2 \dots$ considerate al § 3 raggiungono il massimo r, e perciò tutti i parametri sono essenziali, cioè $\rho = r$, e non esiste alcuna relazione lineare fra le x. Se invece

---

(*) Indicheremo in seguito brevemente il Wronskiano di $x_1\ x_2 \dots x_r$ con $W(x_1\ x_2 \dots x_r)$.

W si annulla, la sua caratteristica sarà $\rho < r$ e le caratteristiche $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ formeranno la serie

$$1, 2, 3, \ldots \rho \ldots$$

crescente fino a ρ e d'allora in poi stazionaria – Vi saranno quindi $r-\rho$ relazioni distinte lineari omogenee a coefficienti costanti fra le x.

I risultati generali ottenuti al § 3 servono altresì per riconoscere, dato un numero qualunque m di funzioni $y_1, y_2 \ldots y_m$ di quante si vogliano variabili indipendenti $x_1, x_2 \ldots x_n$, se fra le $y_1 y_2 \ldots y_m$ hanno luogo relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti e a computare il numero di queste relazioni distinte.

Applicando infatti i teoremi del § 3 ... si ha il teorema seguente che è utile esporre per il seguito:

Si costruiscano le successive matrici

$$M_1 = \left| y_i \ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \ \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right| \qquad i = 1, 2 \ldots m$$

$$M_2 = \left| y_i \ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \ \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \ \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1^2} \ \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_n^2} \right|$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

ciascuna matrice deducendosi dalla precedente coll'aggiun-

ta di colonne formate colle derivate dell'ordine superiore delle y. Le caratteristiche

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots\ldots$$

di queste matrici formano una serie crescente fino ad un massimo ρ, raggiunto il quale rimane stazionaria. Il numero delle relazioni lineari omogenee da cui le y sono legate sarà allora $r-\rho$.

§ 164

Sistemi fondamentali d'integrali

Ritornando ora all'equazione differenziale lineare (1), vediamo subito che si può, in infiniti modi, scegliere m suoi integrali particolari

$$x_1, x_2 \ldots x_m,$$

che siano linearmente indipendenti; poichè, essendo arbitrari per $t=t_0$ i valori di ciascun integrale e delle sue prime $m-1$ derivate, possiamo sempre fare in guisa che il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 \ldots\ldots x_1^{(m-1)} \\ x_2 \ldots\ldots x_2^{(m-1)} \\ \text{- - - - - - -} \\ x_m \ldots\ldots x_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero per $t=t_0$ e allora, a causa

della continuità, rimarrà diverso da zero almeno in un intorno di t_0. È facile anzi vedere di più che, comunque si prolunghino analiticamente gli integrali (per un medesimo cammino), essi rimarranno sempre linearmente indipendenti. E infatti se questi prolungamenti analitici fossero legati da una relazione lineare, la medesima relazione dovrebbe sussistere, retrocedendo, fra i rami primitivi. La stessa cosa risulta dalla notevole formola seguente, dovuta a Liouville. Se si forma la derivata rapporto a t del Wronskiano W, derivando per colonne, ed osservando che $x_1, x_2 \dots x_n$ sono integrali particolari della (1), si trova subito

$$\frac{dW}{dt} = p_1 W,$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p_1 dt} W\right) = 0,$$

da cui integrando si ha la formola di Liouville:

$$(3) \qquad W = C e^{\int_{t_0}^{t} p_1 dt} \qquad (C \text{ costante})$$

Questa ci dimostra appunto che se W non si annulla per $t = t_0$, non potrà mai annullarsi in alcun altro punto regolare.

Un sistema di n integrali particolari della (1)

linearmente indipendenti dicesi un sistema fondamentale. La denominazione proviene da ciò che se

$$x_1, x_2 \dots x_n$$

è un tale sistema d'integrali, ogni altro integrale x sarà necessariamente una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di quegli m integrali particolari:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m$$

E infatti il Wronskiano W di $x, x_1, x_2 \dots x_m$ è necessariamente nullo, come si vede tenendo conto della (1) cui soddisfano $x, x_1, x_2 \dots x_m$.

Esistono evidentemente infiniti sistemi fondamentali d'integrali. Essi si ottengono tutti da uno $x_1, x_2 \dots x_m$ effettuando sopra le x sostituzioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$(4) \qquad y_i = \sum_k^{1 \dots m} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

con determinante $|a_{ik}| \neq 0$.

Queste sostituzioni (4) formano il gruppo lineare omogeneo a m^2 parametri, gruppo che indichiamo con L. Si osservi che le m^2 trasformazioni infinitesime generatrici di L sono le seguenti

$$(4^*) \qquad X_{ik} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2 \dots m).$$

§ 165
Invarianti differenziali razionali del gruppo L

Date ad arbitrio m funzioni della variabile t

$$x_1, x_2, \dots x_m,$$

le quali siano linearmente indipendenti, possiamo sempre formare un'equazione differenziale lineare dell'ordine m che abbia $x_1, x_2 \dots x_m$ per un sistema (fondamentale) d'integrali. Essa è data, in modo univoco, come risulta dalle osservazioni del § 33 relative alla eliminazione di costanti arbitrarie, dall'eguagliare a zero il determinante d'ordine $m+1$:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} x^{(m)} & x^{(m-1)} & \dots & x'' & x' & x \\ x_1^{(m)} & x_1^{(m-1)} & \dots & x_1'' & x_1' & x_1 \\ x_2^{(m)} & x_2^{(m-1)} & \dots & x_2'' & x_2' & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^{(m)} & x_m^{(m-1)} & \dots & x_m'' & x_m' & x_m \end{vmatrix} = 0 .$$

Se la scriviamo sotto la forma (1)

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} x' + p_m x ,$$

possiamo trarne i coefficienti p espressi razionalmente per $x_1, x_2 \dots x_m$ e le loro derivate fino all'ordine m.

Per ciò, ponendo

$$W = \begin{vmatrix} x_1^{(m-1)} & x_1^{(m-2)} & \dots & x_1' & x_1 \\ x_2^{(m-1)} & x_2^{(m-2)} & \dots & x_2' & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^{(m-1)} & x_m^{(m-2)} & \dots & x_m' & x_m \end{vmatrix}$$

e indicando con W_i il determinante che si ottiene dal Wronskiano W sostituendo agli elementi della colonna i^{ma} gli altri

$$x_1^{(m)}\ x_2^{(m)} \dots x_m^{(m)},$$

troviamo per le formole richieste

$$(5^*) \qquad p_i = \frac{W_i}{W}$$

Osserviamo ora che ove si operi sopra $x_1\ x_2 \dots x_m$ e le loro derivate una sostituzione qualunque (4) del gruppo lineare omogeneo L, i coefficienti p restano evidentemente inalterati. Secondo i concetti generali di Lie, che abbiamo sviluppato nel Cap. IX, possiamo dunque dire che

$$p_1, p_2 \dots p_m$$

sono invarianti differenziali d'ordine m del gruppo L. Di più essi sono in numero di m evidentemente indipendenti, e razionali nei loro argomenti. I risultati generali di Lie esposti nel Cap. IX si dimostrano ora facilmente che non esistono altri

invarianti differenziali d'ordine m. indipendenti da $p_1, p_2 \ldots p_m$, e tutti gli invarianti differenziali d'ordine superiore si ottengono dalle successive derivate dei coefficienti p. Se prolunghiamo infatti il gruppo $\mathcal{L}$ r volte in $\mathcal{L}^{(r)}$, secondo le regole del § 116, per le sostituzioni generatrici di $\mathcal{L}^{(r)}$ troviamo le m^2 seguenti

$$X_{ik}^{(r)} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} + x_i' \frac{\partial f}{\partial x_k'} + \cdots + x_i^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_k^{(r)}} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

Gli invarianti differenziali d'ordine r (o inferiore) si otterranno quindi integrando il sistema completo

$$(6) \qquad X_{ik}^{(r)} f = 0 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

Ora, finchè $r < n$, vi sono precisamente $(r+1)m$ di queste equazioni linearmente indipendenti, cioè tante quante sono le variabili

$$x_i, x_i', x_i'' \ldots x_i^{(r)} \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

Prendansi infatti fra le (6) le $(r+1)m$ equazioni

$$(6^*) \qquad X_{ik}^{(r)} f = 0 \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r+1 \\ k = 1, 2 \ldots m ; \end{cases}$$

il loro determinante, come subito si vede, è la potenza m^{ma} del determinante

$$W(x_1 x_2 \ldots x_{r+1}) = \begin{vmatrix} x_1^{(r)} & x_1^{(r-1)} & \cdots & x_1' & x_1 \\ x_2^{(r)} & x_2^{(r-1)} & \cdots & x_2' & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{r+1}^{(r)} & x_{r+1}^{(r-1)} & \cdots & x_{r+1}' & x_{r+1} \end{vmatrix}$$

ed è perciò $\neq 0$, onde le (6*) sono linearmente indipendenti. Per $r \geq m$ le (6) sono in numero di m^2 indipendenti. Si conclude di qui che il gruppo S non possiede invarianti differenziali d'ordine $r < m$, e per $r \geq m$ vi sono precisamente

$$(r+1)m - m^2 = m(r+1-m)$$

invarianti d'ordine r, in particolare m invarianti differenziali d'ordine m. Questi sono evidentemente $p_1, p_2, \dots p_m$. Ogni qualvolta l'ordine r cresce (da m in poi) di un'unità, cresce di m il numero degli invarianti differenziali, onde si vede appunto che questi invarianti differenziali si riducono unicamente ai coefficienti p ed alle loro successive derivate (*).

Pel nostro scopo attuale occorre considerare in particolare gli invarianti che sono razionali nelle

$$x_1, x_2, \dots x_m$$

e nelle loro derivate successive. Sussiste per questi invarianti il teorema fondamentale (Appell).

(*) Si noti che, essendo $p_1, p_2, \dots p_m$ funzioni arbitrarie di t, non può sussistere una relazione fra i coefficienti p e le loro successive derivate.

Ogni funzione razionale di $x_1, x_2 \ldots x_m$ e delle loro derivate fino ad un certo ordine, che rimanga invariata per tutte le sostituzioni del gruppo lineare omogeneo L, si esprime razionalmente per i coefficienti p e le loro derivate.

La dimostrazione di questo teorema, che assimila gli invarianti razionali del gruppo L alle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione algebrica, si potrebbe trarre facilmente dalle teorie generali di Lie ora ricordate. Ma si può anche dimostrarlo in modo elementare come segue.

Data una funzione razionale

$$R(x_1, x_2 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m'; \ldots x_1^{(\mu)} \ldots x_m^{(\mu)})$$

delle x e loro derivate fino ad un certo ordine μ, si potrà in primo luogo, ove sia $\mu \geq m$, abbassare l'ordine delle derivazioni fino a $m-1$, facendo uso delle identità

$$x_i^{(m)} = p_1 x_i^{(m-1)} + \cdots + p_m x_i \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

e di quelle che ne seguono per derivazione.

Per tal modo si porrà la R identicamente sotto la forma di una funzione razionale delle x e loro derivate fino all'ordine $m-1$ e dei coefficienti e loro derivate successive, diciamo:

$$(\gamma)\quad \mathcal{R}(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m'; \ldots x_1^{(n)} \ldots x_m^{(n)}) =$$

$$= R(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m'; \ldots x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)}; p_1 \ldots p_m; p_1' p_2' \ldots p_m' \ldots),$$

e spesso indicheremo più brevemente il secondo membro con $R(x, p)$. Se supponiamo che la primitiva $\mathcal{R}$ sia un invariante differenziale, essendo la (γ) un'identità, sarà pure un invariante differenziale $R(x, p)$, cioè eseguendo sulle x una sostituzione qualunque di $\mathcal{G}$

$$x_i = \sum_k a_{ik} X_k \quad , \quad x_i^{(r)} = \sum_k a_{ik} X_k^{(r)}$$

si dovrà avere, qualunque siano le a;

$$(\gamma^*)\quad R(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m'; \ldots x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)}; p_1 \ldots p_m; p_1' \ldots p_m' \ldots) =$$

$$= R(X_1 \ldots X_m; X_1' \ldots X_m'; \ldots X_1^{(m-1)} \ldots X_m^{(m-1)}; p_1 \ldots p_m; p_1' \ldots p_m' \ldots)$$

poichè le p e le loro derivate restano invariate.

Ora, per un valore arbitrario di t, si può disporre delle m^2 costanti $\underline{a}$ in guisa da far assumere alle

$$X_1 \ldots X_m; X_1' \ldots X_m'; \ldots X_1^{(m-1)} \ldots X_m^{(m-1)}$$

valori affatto arbitrari e la identità (γ^*) non potrebbe aver luogo se la $R(x, p)$ dipendesse effettivamente dalle x e loro derivate.

L'invariante differenziale supposto deve dunque ridursi, per la trasformazione eseguita, ad

una funzione razionale dei coefficienti p_i loro derivate. Ciò dimostra l'enunciato teorema di Appell.

§ 166

Invarianti dei sottogruppi di un gruppo G_r

Come in algebra, per la formazione delle risolventi di una data equazione, è essenziale di considerare, accanto alle funzioni simmetriche, funzioni razionali non simmetriche delle radici, così nel campo delle equazioni differenziali lineari importa considerare, insieme agli invarianti differenziali, delle funzioni razionali qualunque delle $x_1 x_2 \ldots x_m$ e delle loro derivate. Se in una tale funzione

$$R(x_1 x_2 \ldots x_m ; x_1' \ldots x_m' ; \ldots x_1^{(n)} \ldots x_m^{(n)})$$

eseguiamo le sostituzioni del gruppo $\mathfrak{L}$ (prolungato) sulle x e loro derivate, potrà darsi che la R, pur non rimanendo invariata per tutte le sostituzioni di $\mathfrak{L}$ (pur non essendo un invariante differenziale) rimanga invariata per una parte di queste. Ed è a priori evidente che quelle so-

stituzioni di $\mathfrak{L}$ che lasciano invariata la forma di R costituiscono in $\mathfrak{L}$ un sottogruppo; questo può essere del resto un sottogruppo puro di Lie (generato da trasformazioni infinitesime, ovvero un sottogruppo misto. In ogni caso la questione fondamentale che dobbiamo qui esaminare è la seguente: se operando sugli argomenti di R le sostituzioni di $\mathfrak{L}$ la funzione che si ottiene conterrà tutti gli m^2 parametri a_{ik} come essenziali, ovvero se questi si riducranno ad un numero minore. È opportuno proporre e risolvere la questione stessa in modo generale per un gruppo qualsiasi G_r di trasformazioni sulle x

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_m; a_1 a_2 \dots a_r),$$

ricercando se per una data funzione F delle x, operando sugli argomenti le trasformazioni di G_r, la funzione risultante

$$F(x_1' x_2' \dots x_m') = F(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_m(x,a)) =$$

$$= \Phi(x_1 x_2 \dots x_m; a_1 a_2 \dots a_r)$$

verrà a contenere tutti gli r parametri a come essenziali, ovvero questi si riducranno a un numero minore. A tale domanda risponde il teorema generale seguente (Vessiot):

Affinchè la funzione $\Phi(x, a)$ contenga soltanto come parametri essenziali $r-\rho$ combinazioni dei parametri $\underline{a}$, è necessario e sufficiente che la funzione $F(x, x_2 \ldots x_m)$ ammetta precisamente ρ trasformazioni infinitesime distinte di G_r. Queste trasformazioni generano allora in G_r un sottogruppo G_ρ (intransitivo) a ρ parametri di cui F è un invariante.

La seconda parte del teorema è evidentemente una conseguenza della prima, a dimostrare la quale basterà provare 1° che se $\Phi(x, a)$ contiene $r-\rho$ parametri essenziali soltanto, la $F(x, x_2 \ldots x_m)$ ammetterà <u>almeno</u> ρ trasformazioni infinitesime di G_r; 2° che se $F(x, \ldots x_m)$ ammette ρ trasformazioni infinitesime di G_r, la $\Phi(x, a)$ dipenderà al più da $r-\rho$ parametri essenziali.

Queste proprietà risultano dimostrate dalle osservazioni seguenti: 1° Suppongasi che $\Phi(x, a)$ contenga solo $r-\rho$ parametri essenziali. Con un cangiamento di parametri si può supporre che questi siano

$$a_{\rho+1},\ a_{\rho+2} \ldots a_r,$$

onde la $\Phi(x, a)$ non dovrà contenere $a_1, a_2 \ldots a_\rho$ e

Perciò sarà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \quad \text{per } k = 1, 2, \dots \rho$$

Ora si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_i^{1\dots m} \frac{\partial F(x_1' x_2' \dots x_m')}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial a_k},$$

ed avendo riguardo alle equazioni differenziali fondamentali (A) §7 (pag. 29):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_i^{1\dots m} \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x') \psi_{sk}(a) \frac{\partial F(x_1' \dots x_m')}{\partial x_i'} = 0,$$

cioè

$$(8) \qquad \sum_s^{1\dots r} \psi_{sk}(a) X_s' F' = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots \rho)$$

Il determinante $|\psi_{sk}|$ essendo diverso da zero, se diamo alle a un sistema qualunque di valori particolari che non annullino quel determinante, i primi membri delle (8) sono ρ combinazioni lineari indipendenti di

$$X_1' F', X_2' F', \dots X_r' F'$$

onde si conclude appunto che la $F(x_1 x_2 \dots x_m)$ ammette ρ trasformazioni infinitesime indipendenti di G_r.

2° Inversamente supponiamo che $F(x_1 \dots x_m)$ ammetta ρ trasformazioni infinitesime di G_r e siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_\rho f,$$

sarà quindi:

$$X_j'F' = \sum_i \xi_{ji}(x')\frac{\partial F(x_1' \dots x_m')}{\partial x_i'} = 0, \text{ per } j = 1, 2, \dots \rho$$

A causa delle formole (B) § 8 (pag. 33), le precedenti possono scriversi

$$\sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F(x_1' \dots x_m')}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_k^{1\dots r}\alpha_{jk}(a)\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0$$

$$j = 1, 2 \dots \rho$$

Queste sono ρ equazioni distinte, cui soddisfa Φ come funzione delle $\underline{a}$, con coefficienti α_{jk} funzioni delle a, e per ciò i parametri essenziali si ridurranno <u>al massimo</u> ad $r - \rho$ (cf. § 2)

Il processo stesso di dimostrazione dato pel teorema può servire a trovare il sottogruppo G_ρ di G_r che lascia invariata la funzione assegnata $F(x_1\, x_2 \dots x_m)$ - Calcolate infatti le r funzioni

$$X_1F = \xi_1\ , X_2F = \xi_2 \dots\dots X_rF = \xi_r\ ,$$

la questione si riporta a riconoscere se le funzioni note $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_r$ sono legate fra loro da relazioni lineari omogenee e da quante - Per questo basterà applicare i criteri stabiliti alla fine del § 163, ciò che fornirà anche i valori dei coefficienti costanti nelle dette relazioni lineari e farà quindi conoscere le trasformazioni infinitesime generatrici del sottogruppo G_ρ -

§ 167
Risolventi delle equazioni differenziali lineari

Ritornando al nostro argomento principale delle equazioni differenziali lineari, consideriamo una qualunque funzione razionale delle x_1, x_2 .... x_m e loro derivate fino ad un certo ordine μ – Quando sia $\mu \geq m$ riduciamo, col processo del § 165, l'ordine delle derivazioni fino a $m-1$ ponendo la R sotto la forma

$$R(x, p)$$

ove la R contiene razionalmente le x e loro derivate fino all'ordine $m-1$, e inoltre i coefficienti p e le loro derivate –

Per ricercare allora il sottogruppo di $\mathfrak{L}$ che lascia invariata $R(x, p)$, dovremo eseguire una sostituzione qualunque

$$X_i^{(\lambda)} = \sum_k a_{ik} x_k^{(\lambda)} \quad \begin{cases} i = 1, 2 \dots m \\ \lambda = 1, 2 \dots m-1 \end{cases}$$

di $\mathfrak{L}$, e porre la relazione

$$(9) \qquad R(x, p) = R(X, p),$$

cercando di determinare i corrispondenti valori ammissibili per i coefficienti a_{ik} –

Ordinando la (9) rispetto alle $x_1\ x_2 \ldots x_m$ e loro derivate, dovremo per ciò eguagliare da una parte e dall'altra i coefficienti corrispondenti, ciò che fornirà un certo numero di relazioni algebriche indipendenti fra i coefficienti a_{ik}. Queste saranno le condizioni <u>necessarie</u> e <u>sufficienti</u> affinchè le corrispondenti trasformazioni delle x lascino la $R(x,p)$ invariata; tali trasformazioni formeranno entro $\mathfrak{L}$ un sottogruppo, che potrà secondo i casi essere un gruppo puro di Lie, ovvero un gruppo misto H. In ogni caso H conterrà un sottogruppo G_ρ a ρ parametri generato da ρ trasformazioni infinitesime di $\mathfrak{L}$ (cf. § 82) - È da osservarsi che il gruppo H, come G_ρ, dipenderà algebricamente dai parametri in esso contenuti; si dirà per ciò un sottogruppo algebrico di $\mathfrak{L}$ - Il calcolo delle trasformazioni infinitesime generatrici di G_ρ si eseguirà, come si è visto in generale al paragrafo precedente, mediante risoluzione di sistemi di equazioni lineari; così troveremo le ρ trasformazioni generatrici di G_ρ che indichiamo con

$$Z_1 f,\ Z_2 f \ldots\ldots Z_\rho f,$$

e che saranno ρ combinazioni lineari indipendenti (a coefficienti costanti) delle m^2 trasformazioni X_{ik}.

generatrici di $\mathcal{S}$.

Ora la $R(X, p)$ è una funzione di t, che indichiamo con

$$V = R(X, p)$$

contenente $m^2 - \rho$ costanti arbitrarie essenziali.

Dai teoremi generali sulla formazione delle equazioni differenziali per eliminazione di costanti arbitrarie (cf. § 33) risulta che si potrà formare una equazione differenziale d'ordine $m^2 - \rho$ a cui soddisfa la $V(t)$.

Per precisare meglio il modo di formazione e la natura di questa equazione differenziale, facciamo uso delle considerazioni seguenti. Formiamo le successive derivate rapporto a t degli ordini $1, 2, \dots m^2 - \rho$ della funzione $R(x, p)$ ed ogni volta riduciamo, col processo del § 165, l'ordine delle derivate delle $\underline{x}$ a $\underline{m-1}$; le funzioni così ottenute indichiamo con

$$R_1(x, p)\,,\ R_2(x, p) \dots\dots R_{m^2-\rho}(x, p)\ ^{(*)}$$

(*) Così sarà p. e. $R_1(x, p)$ definita dalla formola

$$R_1(x,p) = \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i} p_i' + \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i'} p_i'' + \dots +$$
$$+ \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i} x_i' + \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i'} x_i'' + \dots\dots +$$
$$+ \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i^{(m-2)}} x_i^{(m-1)} + \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i^{(m-1)}} (p_1 x_i^{(m-1)} + \dots + p_m x_i)$$

Derivando successivamente, rapporto a t, la (9) si vede chiaramente che le $m^2 - \rho + 1$ funzioni

(10) $R(x, p), \ R_1(x, p), \ R_2(x, p) \ldots\ldots R_{m^2-\rho}(x, p)$

ammetteranno tutte, come la prima, il gruppo G_ρ, e saranno quindi invarianti differenziali d'ordine $\leq m-1$ di G_ρ - Come funzioni delle m^2 variabili

$$x_1\ x_2 \ldots x_m\ ;\ x'_1 \ldots x'_m\ ;\ \ldots\ldots ;\ x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)}$$

le (10) saranno quindi soluzioni del sistema completo delle ρ equazioni

(11) $\quad Z_1^{(m-1)} f = 0\ , \ Z_2^{(m-1)} f = 0\ , \ \ldots\ldots Z_\rho^{(m-1)} f = 0\ ,$

che si ottengono eguagliando a zero le trasformazioni infinitesime del gruppo $G_\rho^{(m-1)}$ prolungato $(m-1)$ volte da G_ρ - Le (11) sono ρ combinazioni lineari distinte delle m^2 trasformazioni infinitesime $X_{ik}^{(m-1)}$ di $\mathfrak{L}^{(m-1)}$; queste ultime, come si è visto al § 165, danno eguagliate a zero m^2 equazioni linearmente indipendenti, e perciò anche le ρ equazioni (11) sono linearmente indipendenti - Questo sistema completo (11) ammette dunque soltanto $m^2 - \rho$ soluzioni, onde segue che fra le $m^2 - \rho + 1$ soluzioni (10) ha luogo necessariamente una relazione - Ciò equivale a dire che dalle $m^2 - \rho + 1$ relazioni

---

e analogamente per le successive -

$$V = R(x,p)\,,\ \frac{dV}{dt} = R_1(x,p),\ \frac{d^2V}{dt^2} = R_2(x,p), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \frac{d^{m^2-p}V}{dt^{m^2-p}} = R_{m^2-p}(x,p)$$

si possono eliminare le m^2-p quantità $x_i, x_i' \ldots x_i^{(m-1)}$ $(i=1,2,\ldots m)$; ne risulterà quindi una relazione della forma

$$(12)\qquad \Phi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^{m^2-p}V}{dt^{m^2-p}}\right) = 0,$$

dove Φ sarà una funzione razionale intera dei suoi argomenti, con coefficienti funzioni razionali di $p_1, p_2 \ldots p_m$ e delle loro derivate.

Pel modo stesso come la (12) è stata formata, utilizzando soltanto l'equazione differenziale (1) cui soddisfano $x_1, x_2 \ldots x_m$, è chiaro che operando in $R(x,p)$ una qualunque sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti sulle x (anche se a determinante nullo) si avrà un'altra soluzione della (12) stessa. È da osservarsi ancora che l'equazione differenziale (12) ha l'ordine minimo di un'equazione differenziale cui può soddisfare $R(X,p)$, perchè, contenendo questa m^2-p costanti essenziali, non può soddisfare ad un'equazione d'ordine $< m^2-p$.

Così adunque, presa ad arbitrio una funzion

razionale d'un sistema fondamentale d'integrali delle (1) e delle loro derivate, si può sempre formare con processi algebrici un'equazione differenziale algebrica come le (12), a cui soddisfa la data funzione razionale, insieme a tutte le sue trasformate per mezzo delle sostituzioni di $\mathfrak{L}$, e che ha il minimo ordine possibile. Queste equazioni (12) corrispondono evidentemente, nel campo attuale, alle risolventi delle equazioni algebriche e si diranno perciò: le risolventi della equazione differenziale lineare.

Per addurre un esempio semplicissimo di formazione di risolventi basterà ricordare le formole (3) di Liouville (§ 164). Se come funzione razionale delle x e loro derivate prendiamo il Wronskiano $W(x_1, \ldots x_m)$, è chiaro che esso rimane invariato per tutte e sole quelle sostituzioni di $\mathfrak{L}$ che hanno il determinante $|a_{ri}| = 1$. Queste formano in $\mathfrak{L}$ un sottogruppo invariante con $\rho = m^2 - 1$ parametri; perciò W deve soddisfare ad una risolvente di 1° grado. Ed in effetto la formola di Liouville

$$\frac{dW}{dt} - p_1 W = 0$$

ci dà appunto la risolvente in questione.

§ 168.
La risolvente di Picard e le sue proprietà fondamentali.

Come nella teoria di Galois le più importanti risolventi di un'equazione algebrica sono quelle formate con funzioni razionali delle radici che mutano di valore per ogni permutazione effettuata sulle radici (risolventi di Galois), così nel campo delle equazioni differenziali lineari hanno importanza fondamentale le risolventi cui soddisfano quelle funzioni razionali degli integrali di un sistema fondamentale $(x, x_1 \dots x_m)$ e loro derivate, che mutano di valore per ogni sostituzione del gruppo lineare omogeneo L. Queste funzioni razionali $R(x, x_1 \dots x_m; p)$ debbono dunque esser tali che nella

$$R(X, p) = R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i, \dots \Sigma a_{mi} x_i; p)$$

gli m^2 parametri a_{ik} siano tutti essenziali. Le corrispondenti risolventi di grado m^2 si diranno risolventi di Picard.

Ma qui importa subito fare una distinzione essenziale fra due sorta d'invariabilità, che si possono considerare nelle dette funzioni razionali $R(x, p)$

rispetto alle sostituzioni di $\mathfrak{L}$. L'eguaglianza

$$(\alpha)\quad R(x_1, x_2 \dots x_m; p) = R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i, \dots \Sigma a_{mi} x_i; p)$$

può aver luogo (per certi valori delle a) o identicamente negli m^2 argomenti

$$x_i, x_i', x_i'' \dots x_i^{(m-1)} \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

riguardati come arbitrari, o solo in quanto ponendovi per questi le loro espressioni in funzione di t, le due funzioni di t nei due membri della (α) sono effettivamente eguali. Nel primo caso parleremo d'invariabilità *formale*, nel secondo d'invariabilità *numerica*. È chiaro che l'invariabilità formale ha per conseguenza l'invariabilità numerica, ma non viceversa. Così le sostituzioni di $\mathfrak{L}$ che lasciano *formalmente* invariata una funzione razionale $R(x; p)$ formano certamente un gruppo; altrettanto però non si può asserire in generale di quelle che la lasciano soltanto *numericamente* invariata.

Per costruire una risolvente di Picard, quale importa per la teoria, occorre ora prendere una funzione razionale $R(x; p)$ che cangi *numericamente* di valore per ogni sostituzione di $\mathfrak{L}$ eseguita sulle x, tale cioè che nella

$$R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i \dots \Sigma a_{mi} x_i; p),$$

pensata come funzione di t, tutti gli m^2 parametri a siano essenziali. Nel modo più semplice troviamo una tale funzione V ponendo

$$V = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_m x_m ,$$

dove le u sono funzioni fisse di t, comunque scelte. Eseguendo sulle x entro la V una sostituzione qualunque $|a_{ik}|$ di $\mathcal{G}$, se ne ottiene la funzione

$$\bar{V} = \sum_{ik} a_{ik} u_i x_k ;$$

e facilmente si intende che, salvo particolari determinazioni per le u, nella V risulteranno essenziali tutti gli m^2 parametri a_{ik}, ossia le m^2 funzioni di t $u_i x_k$ saranno linearmente indipendenti. Per dimostrarlo in tutto rigore, basterà assegnare una determinazione particolare delle u per la quale questo accada realmente (*).

Supposto, per fissare le idee, che $t = 0$ sia un punto regolare pei coefficienti p_i dell'equazione differenziale data (1), e quindi per gli integrali prendiamo semplicemente

$$u_i = t^{(i-1)m}$$

e si vedrà che le m^2 funzioni

$$u_i x_k = t^{(i-1)m} x_k$$

(*) Cf. Bet. Math. Annalen Bd 56

sono linearmente indipendenti. Al contrario, suppongasi che siano legate da un'identità lineare

(13) $$\sum_{ik} c_{ik} u_i x_k = \sum_k c_{1k} x_k + t^m \sum_k c_{2k} x_k + t^{2m} \sum_k c_{3k} x_k + \dots + t^{(m-1)m} \sum_k c_{mk} x_k = 0.$$

Sviluppando gli integrali x_k in serie di Taylor secondo le potenze di t, abbiasi

(14) $$x_k = \bar{x}_k + t\bar{x}'_k + \frac{t^2}{1.2}\bar{x}''_k + \dots\dots,$$

dove $\bar{x}_k$, $\bar{x}'_k$, $\bar{x}''_k$ .... indicano i valori per $t=0$ della x_k e delle sue derivate.

Sostituendo nella (13) ed eguagliando a zero i coefficienti di $1, t, t^2, \dots t^{m-1}$ nello sviluppo, si ottengono le equazioni:

$$\sum_k c_{1k} \bar{x}_k = 0, \quad \sum_k c_{1k} \bar{x}'_k = 0, \quad \sum_k c_{1k} \bar{x}''_k = 0, \dots\dots \sum_k c_{1k} \bar{x}^{(m-1)}_k = 0,$$

e poichè il Wronskiano

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}'_1 & \dots\dots & \bar{x}^{(m-1)}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}'_2 & \dots\dots & \bar{x}^{(m-1)}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_m & \bar{x}'_m & \dots\dots & \bar{x}^{(m-1)}_m \end{vmatrix}$$

è differente da zero, ne segue intanto

$$c_{11} = c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1m} = 0$$

Dopo di ciò dalla (13) si deduce l'altra

$$\sum c_{2k} x_k + t^m \sum c_{3k} x_k + \dots + t^{(m-2)m} \sum_k c_{mk} x_k,$$

dalla quale, collo stesso ragionamento, si deduce:

$$c_{21} = c_{22} = \dots\dots = c_{2m} = 0 ;$$

e così proseguendo si vede che tutte le c_{ik} sono nulle, cioè la relazione supposta (13) non può esistere –

Immaginiamo dunque nella

(15) $$V = \sum_i u_i x_i$$

scelte le u in guisa che le m^2 funzioni $u_i x_k$ siano linearmente indipendenti, e formiamo le derivate di V rapporto a t degli ordini $1, 2, \dots m^2$, riducendo ogni volta, col processo del § 165, l'ordine delle derivazioni delle x_i a non superare $m-1$. Per tal modo otteremo le m^2+1 funzioni

(16) $$V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \dots\dots \frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}}$$

espresse linearmente ed omogeneamente per le m^2 quantità

(16*) $$x_i, x_i', x_i'' \dots\dots x_i^{(m-1)}, \quad i = 1, 2, \dots m$$

con formole del tipo seguente:

(15*) $$\frac{d^rV}{dt^r} = \sum_{ik} \alpha_{ik}^{(r)} x_i^{(k-1)} \quad r = 0, 1, 2 \dots m^2,$$

dove le $\alpha_{ik}^{(r)}$ saranno funzioni note di t formate colle u e loro derivate e coi coefficienti p e loro derivate.

Si osservi subito che nei calcoli eseguiti per trovare queste formole (15*) abbiamo tenuto conto solo di questo che le x_i soddisfano all'equazione differenziale (1); e per ciò le formole stesse valgono ancora per le

x_i mettiamo in loro combinazioni lineari qualunque a coefficienti costanti

$$\sum_k c_{ik}\, x_k$$

qualunque siano le costanti c_{ik}, anche se a determinante nullo. Ciò posto, essendo per la (15*) le m^2+1 funzioni (16) funzioni lineari omogenee delle m^2 quantità (16*), fra quelle m^2+1 funzioni sussisterà almeno una identità lineare

$$(17)\qquad P_0\frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}}+P_1\frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}+\ldots\ldots+P_{m^2-1}\frac{dV}{dt}+P_{m^2}V=0,$$

dove i coefficienti P saranno funzioni note di t formate colle $\alpha^{(h)}_{ik}$. Le considerazioni superiori dimostrano che di questa equazione differenziale lineare (17) sono soluzioni le m^2 funzioni

$$u_i\, x_k$$

che sono linearmente indipendenti; e perciò è impossibile che la (17) sia d'ordine $<m^2$; cioè sarà certamente $P_0 \neq 0$. Questo dimostra altresì che la caratteristica della matrice delle $\alpha^{(h)}_{ik}$ è precisamente eguale a m^2, cioè ha luogo la sola identità (17) fra le (16). Siccome poi $P_0 \neq 0$ non è altro che il determinante dei secondi membri delle prime m^2-1 equazioni (15*), si conclude che queste possono risolversi rispetto alle (16*) e se ne dedurranno in particolare

le formole

$$(18)\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} V + \lambda_{12}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_{1,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}} \\ x_2 = \lambda_{21} V + \lambda_{22}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_{2,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = \lambda_{m1} V + \lambda_{m2}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_{m,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}, \end{cases}$$

dove le λ sono funzioni note di t.

Scriveremo la (17), dividendola per P_0, sotto la forma

$$(P)\quad \frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}} + P_1\frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}} + \cdots\cdots + P_{m^2-1}\frac{dV}{dt} + P_{m^2}V = 0$$

e diremo questa la risolvente di Picard della proposta (1), costruita colla funzione $V = \sum u_i x_i$. Come già si è detto, la soluzione più generale V della risolvente di Picard è data da

$$V = \sum_{ik} c_{ik} u_i x_k ,$$

i coefficienti costanti c_{ik} essendo affatto arbitrarii. Ad una soluzione qualsiasi V corrisponde, secondo le (18), un sistema di m integrali particolari della equazione proposta (1), perfettamente determinati. Questi possono formare e non formare un sistema fondamentale; ed importando distinguere le soluzioni V dell'una specie della risolvente (P) di Picard da quelle dell'altra specie, diremo

che la soluzione V della (P) è fondamentale se le $x_1, x_2 \ldots x_m$ calcolate dalle (18) formano un sistema fondamentale d'integrali della (1) e nel caso opposto diremo che la V è non fondamentale.

Come si distinguono le soluzioni fondamentali V dalle altre? Per una soluzione V non fondamentale deve annullarsi il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(m-1)} \\ x_2 & x_2' & \ldots & x_2^{(m-1)} \\ - & - & - & - \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

e se in questo per $x_1, x_2 \ldots x_m$ poniamo le espressioni (18), e per le derivate quelle che si ottengono similmente per risoluzione delle prime m^2 (15*), otterremo

$$W = \varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \ldots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right).$$

dove φ è una funzione razionale intera degli argomenti scritti, con coefficienti funzioni note di t. - Così adunque:

Le soluzioni non fondamentali V della risolvente di Picard sono tutte e sole quelle che soddisfano alla equazione differenziale algebrica d'ordine m^2-1 (*):

$$(19) \qquad \varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2} \ldots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right) = 0$$

§ 169

Campo di razionalità ed equazioni differenziali algebriche.

Le proprietà fondamentali ora studiate della risolvente di Picard conducono alla importante nozione di un gruppo continuo di trasformazioni (sottogruppo di L) che per una data equazione differenziale lineare compie l'ufficio del gruppo di Galois per un'equazione algebrica. Ma per arrivarvi è necessario prima precisare ciò che s'intende per campo di razionalità.

Sia dato un certo numero di funzioni fondamentali della variabile t

$$v_1(t),\ v_2(t) \dots v_\rho(t),$$

tali che nessuna di esse possa esprimersi per una funzione razionale di t e delle rimanenti v e loro derivate, d'ordine comunque elevato. L'insieme

---

(*) L'ordine di questa non può essere minore di n^2-1 perchè sono soluzioni di essa tutte le V della forma

$$V = \sum_{ik} c_{ik} u_i \alpha_k,$$

quando il determinante delle c sia $=0$, ciò che lascia in questa V precisamente n^2-1 parametri essenziali.

di tutte quelle funzioni di t che si esprimono razionalmente per t stessa, per $v_1, v_2 \dots v_p$ e le loro derivate successive, si dice formare un campo di razionalità, che è determinato dagli elementi fondamentali $v_1\ v_2 \dots v_p$ – Ogni funzione appartenente al campo dicesi razionalmente nota nel campo stesso. Il campo meno ampio di razionalità è quello assoluto delle ordinarie funzioni razionali di t; esso è contenuto in ogni altro campo. Si può ampliare un campo di razionalità aggiungendovi nuovi elementi (funzioni) che prima non vi appartenevano, in tal caso le nuove funzioni si dicono aggiunte –

Passiamo ora a considerare, in un campo qualsiasi di razionalità, delle equazioni differenziali algebriche, che abbiano cioè la forma

$$(20)\qquad F(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0$$

denotando x una funzione incognita di t e la F essendo una funzione razionale intera delle x e sue derivate fino ad un certo ordine m, con coefficienti funzioni di t appartenenti al campo di razionalità attuale –

Se parliamo senz'altro di un'equazione differenziale algebrica (20), intendiamo (ove non si av-

vato il contrario) che il campo di razionalità sia quello naturale determinato dai coefficienti. Così per un'equazione differenziale lineare

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$$

il campo naturale di razionalità sarà quello meno ampio in cui sono contenuti i coefficienti $p_1, p_2, \dots p_m$.

Poste queste definizioni, cominciamo dal dimostrare il lemma seguente.

Se in un dato campo di razionalità due equazioni differenziali algebriche del medesimo ordine m:

$$F(x, x', x'', \dots x^{(m)}) = 0$$

$$F_1(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0$$

hanno una soluzione comune x_1, o esisterà nel medesimo campo un'equazione differenziale algebrica d'ordine $< m$ a cui x_1 soddisfa, ovvero quella di esse che ha grado maggiore od eguale rispetto alla più alta derivata $x^{(m)}$ sarà algebricamente riducibile rispetto a questa.

Se il grado in $x^{(m)}$ di F, F_1 è lo stesso si può subito eliminare fra F, F_1 questa più alta potenza di $x^{(m)}$ e ridursi al caso in cui il grado in $x^{(m)}$ è disuguale. Supponiamo dunque p. e. che la F sia in $x^{(m)}$ di grado maggiore della F_1. Considerando F, F_1 come polinomii in $x^{(m)}$, procediamo

alla ricerca del loro massimo comun divisore (ciò che si fa con operazioni razionali nel campo), e sia questo $\Phi(x, x', x'' \dots x^{(m)})$.

La soluzione comune supposta x_1 delle $F=0$, $F_1=0$ soddisfa certamente la

$$\Phi(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0,$$

per cui se Φ non contiene $x^{(m)}$ la x_1 soddisfa ad un'equazione differenziale algebrica d'ordine $< m$. Se Φ contiene $x^{(m)}$ la contiene ad un grado minore di F, e si ha

$$F(x, x' \dots x^{(m)}) = \Phi(x, x' \dots x^{(m)}) \cdot \Psi(x, x' \dots x^{(m)})$$

essendo Ψ una funzione della medesima specie, e per ciò F è algebricamente riducibile rapporto ad $x^{(m)}$, c.d.d. -

Dimostrato il lemma, procediamo a stabilire il seguente teorema fondamentale dovuto a Königsberger:

Se un'equazione differenziale algebrica d'ordine m

$$(a) \qquad E(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0$$

ha a comune una soluzione con un'equazione differenziale algebrica

$$(b) \qquad f(x, x', x'' \dots x^{(n)}) = 0$$

d'ordine $n \leq m$, la quale sia irriducibile rispetto al

la più alta derivata $x^{(n)}$ e quella soluzione comune x_1 non soddisfa ad alcun'altra equazione differenziale algebrica di ordine $<n$, ogni soluzione (non singolare) della $f=0$ sarà anche soluzione della prima $F=0$

Dalla (b) derivando si ha successivamente:

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x^{(n)}} x^{(n+1)} = f_1(x, x', x'' \dots x^{(n)}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^{(n)}} x^{(n+2)} = f_2(x, x', x'' \dots x^{(n)}), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dove $f_1, f_2 \dots$ sono polinomii negli stessi argomenti $x, x', \dots x^{(n)}$. Ora si osservi in primo luogo che per la soluzione comune x_1 non può annullarsi $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$ altrimenti, essendo $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$ di grado minore della f in $x^{(n)}$, pel lemma dimostrato o dovrebbe la f essere riducibile rispetto a $x^{(n)}$ oppure esisterebbe un'equazione differenziale d'ordine $<n$ cui la x_1 soddisferebbe; ambedue queste ipotesi sono escluse dall'enunciato del teorema. Così dalle (21) si trarranno tutte le derivate della x d'ordine $>n$ e, sostituendo in (a), ne risulterà un'equazione

$$\Phi(x, x', x'', \dots x^{(n)}) = 0,$$

che dovrà essere soddisfatta da $x = x_1$ - E viceversa tutte le soluzioni comuni a $f=0$, $\Phi=0$ che non annullino $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$ (non singolari per f) soddisferanno

anche $\Gamma=0$. Ora la Φ, che contiene certamente $x^{(n)}$ (altrimenti x, soddisferebbe un'equazione d'ordine $<n$), ~~non~~ può avere, pel lemma, un grado in $x^{(n)}$ inferiore o eguale a quello di f. ed ha quindi un grado ~~maggiore~~ - Il massimo comun divisore ordinario di Φ, f, non potendo avere in $x^{(n)}$ che certamente contiene, grado minore di f, avrà lo stesso grado e per ciò sarà la f stessa. Si avrà dunque

$$\Phi(x, x', \ldots x^{(n)}) = f(x, x' \ldots x^{(n)}). \Psi(x, x' \ldots x^{(n)}),$$

onde tutte le soluzioni di $f=0$ sono anche soluzioni di $\Phi=0$ c.d.d.

Osserviamo di passaggio che un'equazione differenziale algebrica $f(x, x', x'' \ldots x^{(n)})=0$ si dice irriducibile, secondo Königsberger, quando possiede le due proprietà seguenti: 1° sia irriducibile nel senso algebrico rispetto alla più alta derivata $x^{(n)}$; 2° non abbia alcuna soluzione comune con equazioni differenziali algebriche d'ordine minore. Dal teorema dimostrato segue subito la proprietà che fa riscontro ad una ben nota nell'algebra.

Se un'equazione differenziale algebrica ammette una soluzione di un'altra equazione differenziale algebrica irriducibile, essa ammette tutte le soluzioni di questa ultima.

§ 170

Gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare

Fondandosi sui risultati ottenuti nel paragrafo precedente, riprendiamo le considerazioni della risolvente (P) di Picard per una data equazione differenziale lineare. - Può darsi che nessuna sua soluzione fondamentale soddisfi ad un'altra equazione differenziale algebrica d'ordine minore (lineare o non lineare) nel campo di razionalità che si considera. Questo avverrà certamente, come fra breve proveremo, se l'equazione differenziale lineare proposta è generale.

Può darsi invece che esistano delle equazioni differenziali algebriche d'ordine minore, cui soddisfa qualche soluzione V, fondamentale di (P) -

Supponiamo che una di queste sia

$$(22) \qquad f\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \dots \frac{d^rV}{dt^r}\right) = 0$$

ed abbia il minimo ordine r possibile; supporremo inoltre, come è lecito, che la f sia irriducibile nel senso algebrico rispetto alla più alta derivata $\frac{d^rV}{dt^r}$, altrimenti sostituiremmo alla $f=0$

un suo fattore irriducibile - S'intende che, ove abbia luogo il primo caso sopra ricordato, si dovrà prendere per la $f=0$ la risolvente stessa (P) di Picard. Osserviamo ora che dalle proprietà supposte alla $f=0$ e dal teorema di Königsberger (§ precedente), segue immediatamente:

Ogni soluzione (non singolare) della (22), che non sia soluzione della (19) § 168

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \dots\dots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right)=0,$$

è una soluzione fondamentale della risolvente di Picard.

Ricordiamo ora che ad ogni soluzione fondamentale V della risolvente di Picard corrisponde un sistema fondamentale d'integrali della proposta perfettamente individuato dalle formule (18). Se ora indichiamo con V_1 una particolare soluzione fondamentale della risolvente di Picard e con $x_1\ x_2 \dots x_m$ il sistema fondamentale corrispondente della (1), avremo

$$V_1 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_m x_m$$

Essendo ora V un'altra soluzione fondamentale qualunque della (P), ed $y_1\ y_2 \dots y_m$ il corrispondente sistema fondamentale d'integrali, avremo ancora:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_m y_m ,$$

e le x_i saranno legate alle y_i da una sostituzione S perfettamente determinata dal gruppo $\mathcal{G}$

$$(S) \qquad y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

Potremo quindi opportunamente indicare la V col simbolo V_S, apponendovi per indice la sostituzione S che lega i due sistemi fondamentali x_i, y_i; così avremo

$$V_S = \sum_{ik} a_{ik} u_i x_k$$

Se in questa per le x_k poniamo i valori (18), espressi linearmente ed omogeneamente per

$$V_1, \frac{dV_1}{dt}, \dots\dots \frac{d^{m-1}V_1}{dt^{m-1}},$$

otteniamo la formola notevole

$$(23) \qquad V_S = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 \frac{dV_1}{dt} + \alpha_3 \frac{d^2V_1}{dt^2} + \dots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1}V_1}{dt^{m^2-1}},$$

dove i coefficienti α sono razionali nel campo che si considera e dipendono unicamente dai coefficienti fissi λ nelle (18) e (linearmente) dai coefficienti a della sostituzione S. Abbiamo dunque la seguente proprietà delle soluzioni fondamentali della risolvente di Picard, che fa riscontro alla ben nota proprietà delle radici della risolvente di Galois per un'equazione algebrica.

Se V_1, V sono due soluzioni fondamentali qualunque della risolvente di Picard, la V si esprime

linearmente ed omogeneamente per la V_1 e le sue derivate mediante la (23)', con coefficienti α razionali nel campo e che dipendono unicamente dalla sostituzione S sugli integrali fondamentali della proposta, colla quale si passa da V_1 a V.

Segue dall' ultima osservazione che nella 23 è lecito cangiare la V_1 in un'altra qualunque soluzione fondamentale V' senza mutare le α, purchè per V_S s'intenda quella nuova soluzione che nasce da V' applicando la S. Così, se S' indica una altra sostituzione qualunque di $\mathcal{L}$, ponendo nel secondo membro della (23) per V_1 la $V_{S'}$, il risultato sarà un'altra soluzione della risolvente di Picard che, secondo le convenzioni fondamentali del § 1, sarà da indicarsi con $V_{S'S}$ e si avrà quindi:

$$(23^*) \quad V_{S'S} = \alpha_1 V_{S'} + \alpha_2 \frac{dV_{S'}}{dt} + \dots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V_{S'}}{dt^{m^2-1}}$$

Ciò posto, veniamo alla dimostrazione del teorema fondamentale della teoria che consiste nella proprietà seguente:

A) - Se V_1 indica una soluzione fondamentale fissa della (22) e V una sua soluzione fondamentale variabile le sostituzioni S di $\mathcal{L}$ colle quali si passa dalla soluzione fissa V_1 a tutte le altre V formano un gruppo (sottogruppo di $\mathcal{L}$) -

Per dimostrarlo basterà provare che se V_s, $V_{s'}$ sono due soluzioni fondamentali qualunque della (22) anche la $V_{s's}$ sarà una soluzione della medesima equazione.

Si ha per ipotesi

$$f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt}, \ldots \frac{d^r V_s}{dt^r}\right) = 0$$

$$f\left(V_{s'}, \frac{dV_{s'}}{dt}, \ldots \frac{d^r V_{s'}}{dt^r}\right) = 0 ;$$

d'altronde sostituendo in $f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt} \ldots\right)$ per V_s l'espressione (23) si ottiene

$$f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt}, \ldots \frac{d^r V_s}{dt^r}\right) = \varphi\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \frac{d^2 V_1}{dt^2}, \ldots\right)$$

dove la φ è razionale intera in V_1 e nelle derivate successive, e poichè sussiste anche la (23.ma) abbiamo altresì:

$$(24) \quad f\left(V_{s's}, \frac{dV_{s's}}{dt} \ldots\right) = \varphi\left(V_{s'}, \frac{dV_{s'}}{dt}, \frac{d^2 V_{s'}}{dt^2} \ldots\right)$$

Ora avendo la

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2 V}{dt^2} \ldots\right) = 0$$

a comune colla $f\left(V, \frac{dV}{dt} \ldots\right) = 0$ la soluzione V_1, ammette, pel teorema di Königsberger, ogni altra soluzione (fondamentale) di questa, per es. la $V_{s'}$; la (24) dimostra allora appunto che anche $V_{s's}$ è una soluzione della (22)

$$f\left(V, \frac{dV}{dt}, \ldots \frac{d^{m-1} V}{dt^{m-1}}\right) = 0,$$

come si era asserito.

Il sottogruppo G di L così determinato di-

ce si il gruppo continuo di trasformazioni dell'equazione differenziale lineare proposta (1) od anche il suo gruppo di razionalità - Queste denominazioni resteranno giustificate dalle proprietà fondamentali per questo gruppo, affatto analoghe alle proprietà del gruppo di Galois per un'equazione algebrica, che dimostreremo nel prossimo paragrafo, le quali proveranno altresì che il gruppo stesso è perfettamente determinato, a meno di una sostituzione lineare omogenea trasformatrice.

Intanto osserviamo che questo gruppo G di razionalità può essere un gruppo puro di Lie con r parametri ovvero un gruppo misto (332); in ogni caso è facile vedere che: le sostituzioni di G dipendono algebricamente dagli r parametri essenziali -

Se esprimiamo infatti che la

$$V_s = \sum_{ik} a_{ik} u_i x_k$$

soddisfa la (22), troveremo un certo numero di relazioni algebriche fra i coefficienti a_{ik} che esprimono le condizioni a ciò necessarie e sufficienti e debbono lasciare $\underline{r}$ parametri arbitrarii.

§ . 171

Proprietà fondamentali del gruppo di razionalità

Veniamo ora a stabilire le proprietà caratteristiche del gruppo G di razionalità, esse sono date dai teoremi seguenti:

I) Ogni funzione razionale degli integrali fondamentali $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_m$ e loro derivate (con coefficienti razionalmente noti nel campo di razionalità) che sia eguale ad una funzione di t razionalmente nota deve rimanere numericamente invariata per tutte le sostituzioni di G.

Sia $R(x_1\, x_2 \ldots x_m;\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_m) = \varphi(t)$ una tale funzione razionale - Per mezzo delle formole fondamentali (18) potremo convertirla in una funzione razionale di $V_1, \frac{dV_1}{dt}, \frac{d^2V_1}{dt^2}, \ldots$ ed in questa, servendoci della (22) cui soddisfa V_1

$$f\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots \frac{d^rV_1}{dt^r}\right) = 0$$

potremo far sparire razionalmente le derivate di V_1 d'ordine superiore ad r; così avremo

(25) $$R(x_1, x_2 \ldots x_m;\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_m) = F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt} \ldots \frac{d^rV_1}{dt^r}\right)$$

dove la F è razionale nei suoi argomenti, e si

può anche supporre di più che se il grado della f nella più alta derivata $\frac{d^r V}{dt^r}$ è μ, quello della F sia ridotto $\leq \mu$.

Se con S indichiamo una sostituzione qualunque di G, che cangi le x nelle y, per le proprietà fondamentali stabilite al paragrafo precedente avremo anche

(25*) $R(y_1\, y_2 \dots y_m ; y_1' y_2' \dots y_m' \dots) = F\left(V_S, \frac{dV_S}{dt} \dots \frac{d^r V_S}{dt^r}\right)$

Ora è per ipotesi

$$F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = \varphi(t),$$

cioè l'equazione

(26) $$F\left(V, \frac{dV}{dt}, \dots \frac{d^r V}{dt^r}\right) - \varphi(t) = 0$$

ha colla (22)

(22) $$f\left(V, \frac{dV}{dt}, \dots \frac{d^r V}{dt^r}\right) = 0$$

la soluzione (fondamentale) V_1 comune. Dunque pel teorema di Königsberger (§ 169), anche la V_S è soluzione della (26), cioè

$$F\left(V_S, \frac{dV_S}{dt} \dots \frac{d^r V_S}{dt^r}\right) = \varphi(t)$$

e per la (25*) si ha quindi

$$R(x_1\, x_2 \dots x_m ; x_1' \dots x_m' \dots) = R(y_1\, y_2 \dots y_m ; y_1' \dots y_m' \dots)$$

vale a dire la R resta numericamente invariata per la S, c.d.d.

II) Inversamente ogni funzione razionale

$$R(x_1\, x_2 \dots x_m ; x_1' \dots x_m' \dots)$$

che rimanga numericamente invariata per tutte le sostituzioni S del gruppo G è una funzione di t razionalmente nota.

Esprimiamo infatti la $R(x_1 \dots x_m; x_1' \dots)$ per mezzo della (20) ed avremo

$$F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt} \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = \psi(t),$$

dove la $\psi(t)$ sarà una certa funzione di t che dobbiamo dimostrare essere razionalmente nota.

Per l'ipotesi fatta si ha anche

$$F\left(V_s, \frac{dV_s}{dt}, \dots \frac{d^r V_s}{dt^r}\right) = \psi(t)$$

qualunque sia la soluzione (fondamentale) V_s della (22). Ma poiché, per una tale soluzione generale V, sono arbitrarii, per un valore fisso ad arbitrio di t, i valori:

$$\xi_1 = V, \quad \xi_2 = \frac{dV}{dt}, \dots \quad \xi_r = \frac{d^{r-1}V}{dt^{r-1}}$$

ed il valore

$$\eta = \frac{d^r V}{dt^r}$$

deve unicamente soddisfare l'equazione

(24) $\qquad f(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_r, \eta) = 0$

di grado μ in η, possiamo anche dire che sarà sempre

$$F(\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r, \eta) = \psi(t)$$

comunque si prendano $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r$ (in funzione di t) perchè η soddisfi la (24) - Indicando con

le radici della (27) in η si ha quindi $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_\mu$

$$F(\xi_1 \dots \xi_r, \eta_1) = F(\xi_1 \dots \xi_r, \eta_2) = \dots = F(\xi_1 \dots \xi_r \eta_\mu)$$

e però

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu}\{F(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r, \eta_1) + F(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r, \eta_2) + \dots \dots$$
$$+ F(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r, \eta_\mu)\}.$$

Il secondo membro è una funzione simmetrica di $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_\mu$ e si esprime quindi per una funzione Θ razionale intera degli argomenti $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r$, con coefficienti razionalmente noti in funzione di t; si ha dunque

$$\Theta(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r) = \psi(t),$$

e la Θ serba per ipotesi sempre lo stesso valore $\psi(t)$ comunque si prendano $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r$ in funzione di t.

Se ne conclude che Θ non può contenere esplicitamente gli argomenti $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r$ e la $\psi(t)$ è dunque razionalmente nota, c. d. d.

A queste proprietà fondamentali è bene aggiungere una terza d'immediata dimostrazione:

III) Nessuna sostituzione del gruppo lineare omogeneo L che sia fuori del gruppo G di razionalità può lasciare numericamente invariate tutte le fun-

zioni razionali $R(x_1 x_2 \dots x_m; x_1' \dots)$ razionalmente no-te.

Infatti si ha

$$f\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = 0$$

e ponendo per V_1 la sua espressione $\Sigma u_i x_i$ si cangia la $f\left(V_1, \frac{dV_1}{dt} \dots \dots\right)$ in una funzione razionale di $x_1 x_2 \dots x_m, x_1' \dots x_m' \dots$ razionalmente nota perchè $= 0$; sia

$$f\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = R(x_1 x_2 \dots x_m; x_1' \dots x_m' \dots)$$

Se una sostituzione T di $\mathcal{Q}$ lascia la R numericamente invariata, si avrà

$$f\left(V_T, \frac{dV_T}{dt}, \dots \frac{d^r V_T}{dt^r}\right) = 0,$$

cioè V_T è soluzione (fondamentale) della (22), e quindi, per la definizione stessa, T appartiene al gruppo di razionalità G.

§. 172

Altra definizione del gruppo di razionalità - Gruppo dell'equazione generale

---

Le proprietà dimostrate nel paragrafo precedente si possono riassumere in quest'altra de-

finizione del gruppo di razionalità (Vessiot).

Il gruppo G di razionalità di un'equazione differenziale lineare è il più ampio sottogruppo del gruppo lineare omogeneo L le cui sostituzioni lasciano numericamente invariate tutte quelle funzioni razionali di un sistema fondamentale $x_1\, x_2 \dots x_m$ di integrali e loro derivate che, nel campo di razionalità assegnato, sono funzioni note di x.

Ne risulta immediatamente che questo gruppo è unico, se si fa naturalmente astrazione dalla indeterminazione proveniente dalla scelta del sistema fondamentale $(x_1 \dots x_m)$. È evidente che se G è il gruppo corrispondente a questo sistema e G_1 è quello corrispondente ad un secondo sistema fondamentale $(y_1\, y_2 \dots y_m)$ che si deduce dal primo mediante la sostituzione T, sarà

$$G_1 = T^{-1}GT$$

La sola indeterminazione che resta nel gruppo di razionalità consiste in questo che ad esso si può sostituire qualunque gruppo affine entro L.

Nel modo di Picard di pervenire al gruppo G, l'unicità non è così evidente. Giova però dimostrare che, aggiungendo alcune semplici

osservazioni, si può ancora arrivare al medesimo risultato. Indichi infatti W_1 un'altra soluzione particolare (fondamentale) qualunque della risolvente di Picard e sia

$$(27^*) \qquad f_1(W_1, W_1' \dots W_1^{(r_1)}) = 0$$

l'equazione differenziale algebrica, irriducibile rispetto alla più alta derivata $W^{(r_1)}$ e di ordine minimo r_1 cui soddisfa; indichi inoltre G_1 il gruppo determinato da W_1 come G da V_1. Se T è la sostituzione che fa passare dagli integrali fondamentali $(x_1, x_2 \dots x_m)$ relativi a V_1 a quelli $(y_1 y_2 \dots y_m)$ corrispondenti a W_1, si avrà per la (23)

$$(28) \qquad W_1 = V_T = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_1' + \dots + \alpha_{m^2} V_1^{(m^2-1)}$$

le α dipendendo unicamente dalla sostituzione T. Essendo ora g una qualunque sostituzione di G avremo anche per la (23*)

$$(28^*) \qquad V_{gT} = \alpha_1 V_g + \alpha_2 V_g' + \dots + \alpha_{m^2} V_g^{(m^2-1)}$$

Sostituendo nel primo membro della (27*), ne verrà

$$f_1(V_{gT}, V_{gT}' \dots V_{gT}^{(r_1)}) = \Theta(V_g, V_g', V_g'' \dots),$$

la Θ essendo razionale nei suoi argomenti, con coefficienti razionalmente noti. Ora è per ipotesi

$$\Theta(V_1, V_1', V_1'' \dots) = 0$$

cioè la $\Theta(V, V', V'' \ldots\ldots) = 0$ ammette la soluzione V_1 della (22) e però anche la V_g; dunque

$$f_1(V_{gT}, V'_{gT}, \ldots\ldots V^{(r)}_{gT}) = 0,$$

ossia la V_{gT} è, come la V_T, una soluzione della (27*).

Se indichiamo con g una qualunque sostituzione di G_1, tutte le soluzioni della (27*) sono date dalle V_{Tg}, quindi è $Tg = gT$, ossia $T^{-1}gT$, qualunque sia g, è una sostituzione di G_1 – Ciò vuol dire che $T^{-1}GT$ è contenuto in G_1 e poichè, per la considerazione inversa, TG_1T^{-1} è contenuto in G, sarà necessariamente

$$G_1 = T^{-1}GT$$

Così è nuovamente dimostrata l'unicità del gruppo G.

Il gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare

(1) $\qquad x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \ldots + p_m x$

dipende essenzialmente dai coefficienti e dal campo di razionalità che si considera – Poniamo ora che l'equazione proposta (1) sia quella generale, talchè $p_1, p_2 \ldots p_m$ sono da riguardarsi come funzioni <u>arbitrarie</u> di t, ed il campo di razionalità sia quello naturale determinato dai

coefficienti (§ 169). È facile vedere che il gruppo G di razionalità è allora il gruppo lineare totale L. Infatti nel campo attuale di razionalità le funzioni razionali di $x_1, x_2 \dots x_m$ e loro derivate razionalmente note sono unicamente quelle esprimibili razionalmente per $p_1, p_2 \dots p_m$ e loro derivate. Una tale funzione $R(x_1, x_2 \dots x_m; x'_1 \dots x'_m \dots)$ sarebbe dunque <u>numericamente</u> eguale ad un'invariante differenziale. Ma siccome le $p_1, p_2 \dots p_m$ sono qui funzioni arbitrarie di t, e tali debbono anche riguardarsi $x_1, x_2 \dots x_m$, l'eguaglianza numerica equivale in questo caso all'eguaglianza formale. Si conclude che ogni tale funzione $R(x_1, x_2 \dots x_m; x'_1 \dots x'_m \dots)$, razionalmente nota resta invariata per tutte le sostituzioni di L (è invariante differenziale) e per ciò il gruppo G coincide con L stesso.

Dunque: L'equazione differenziale generale d'ordine m

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$$

nel campo naturale di razionalità determinato dai coefficienti, ha per gruppo di razionalità il

gruppo lineare omogeneo totale $\mathfrak{L}$ con m^2 parametri.

§. 173

Riduzione del gruppo di razionalità per l'aggiunta di una funzione razionale $R(x_1 \dots x_m, x_1' \dots x_m' \dots)$

Il gruppo di razionalità G di un'equazione differenziale lineare dipende essenzialmente dal campo di razionalità che si considera. Se si amplia il campo di razionalità per aggiunta di nuove funzioni, può accadere che cangi il gruppo. In ogni caso, dalla definizione stessa di Vessiot del gruppo G, discende il teorema.

Ampliando il campo di razionalità, il gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare non può variare che riducendosi ad un suo sottogruppo(*).

(*) La stessa cosa si vede colla definizione di Picard pel gruppo G (§ 170), osservando che se alla (22)

$$f(V, V', V'' \dots V^{(r)}) = 0$$

viene a sostituirsi nel nuovo campo di raziona-

Il problema della integrazione completa della proposta consiste appunto in questo di ampliare il campo di razionalità fino a ridurre il gruppo all'Identità, chè allora le soluzioni stesse x_1, $x_2 \dots x_m$ saranno razionalmente note - La prima e più importante ricerca da farsi, concernente la riduzione del gruppo, è la seguente:

Come varia il gruppo G di un' equazione differenziale lineare allorquando si amplii il campo di razionalità per l' aggiunta di una funzione razionale $R(x, x_1 \dots x_m, x'_1 \dots x'_m \dots)$ delle $x_1 x_2 \dots x_m$ e loro derivate?

La risposta è affatto analoga alla corrispondente nelle teorie algebriche di Galois e noi esponiamo appunto le considerazioni relative parallelamente a quelle note della teoria di Galois.

In primo luogo osserviamo che la funzione aggiunta $R(x, x_1 \dots x_m; x'_1 \dots x'_m \dots)$ non deve rima-

lità la

$$f(V, V', V'' \dots V^{(r)}) = 0$$

che abbia a comune colla precedente la soluzione V_1, tutte le altre soluzioni fondamentali V_3 della seconda saranno soluzioni della prima (pel teorema di Königsberger)

-nere numericamente invariata per tutte le sostituzioni di G, altrimenti sarebbe già nota razionalmente nel campo primitivo e la sua aggiunta non lo amplierebbe. Però può darsi che parte delle sostituzioni di G lascino R numericamente invariata e a questo proposito dimostriamo.

Quelle sostituzioni γ di G che lasciano numericamente invariata una funzione razionale

$$R(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_m;\ x'_1 \ldots\ldots x'_m \ldots\ldots)$$

formano in G un sottogruppo Γ.

E infatti siano γ, γ' due qualunque delle dette sostituzioni; si avrà

$$R\gamma = R_1\ ,\quad R\gamma' = R_1$$

indicando con R_1 la R primitiva, $R\gamma$, $R\gamma'$ ciò che diventa applicandovi rispettivamente γ, γ'.

La funzione razionale delle x_i, $x'_i \ldots\ldots$

$$R\gamma - R_1$$

essendo razionalmente nota, perché nulla, dovrà (§ 171, I) rimanere numericamente invariata per la γ' che appartiene al gruppo di razionalità G; dunque

$$R\gamma\gamma' - R\gamma' = 0,$$

e quindi $R\gamma\gamma' = R_1$. - Ciò dimostra che il

prodotto $\gamma\gamma'$ lascia anche numericamente invariata R, ed appartiene perciò alle γ, c. d. d.

Diremo Γ il sottogruppo numerico della funzione $R(x_1, \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots)$ rispetto a G.

Ciò posto, dimostriamo il teorema fondamentale:

Se si amplia il campo di razionalità coll'aggiunta di una funzione razionale

$$R_1 = R(x_1, \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots),$$

il gruppo di razionalità G si abbassa a quel suo sottogruppo Γ che lascia numericamente invariata R.

Poichè nel nuovo campo di razionalità la R è razionalmente nota, le sostituzioni del nuovo gruppo G_1 di razionalità non possono essere che fra le γ, cioè G_1 è certo sottogruppo di Γ. Per dimostrare che coincide con Γ bisognerà provare inversamente che qualunque γ appartiene a G_1, ossia per la 3ª proprietà al § 171 che la γ lascia numericamente invariata ogni funzione razionale

$$U(x_1 \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots)$$

razionalmente nota nel nuovo campo. Ora una tale U sarà una funzione razionale $\Theta(R_1)$, con coef-

ficienti appartenenti all'antico campo di razionalità, sarà cioè

$$U_1 = U(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m' \ldots) - \Theta(R_1(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m')) = 0$$

La funzione del primo membro è dunque razionalmente nota nel campo primitivo (=0) ed applicandovi la γ dell'antico gruppo G, avremo quindi

$$U\gamma = \Theta(R_\gamma) = \Theta(R_1) = U_1$$

cioè la γ lascia numericamente invariata la U_1, c. d. d.

Come immediata applicazione di questo risultato generale osserviamo la seguente. Consideriamo un'equazione differenziale lineare (1) il cui gruppo sia il gruppo totale L, p. e. l'equazione differenziale generale. Se aggiungiamo al campo di razionalità il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \ldots\ldots & x_1^{(m-1)} \\ x_2 & x_2' \ldots\ldots & x_2^{(m-1)} \\ \vdots & & \\ x_m & x_m' \ldots\ldots & x_m^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

che è una funzione razionale il cui gruppo numerico è il sottogruppo lineare speciale L_1

$$\bar{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

a determinante $|a_{ik}| = 1$, il gruppo dell'equazione si

ridurrà appunto a $\mathfrak{L}_1$. Possiamo dunque dire, rammentando la formola (3) di Liouville (§ 164):

Se per l'equazione differenziale lineare generale (a gruppo totale $\mathfrak{L}$) si aggiunge al campo di razionalità la funzione di t
$$e^{\int p_1 dt}$$
il gruppo di razionalità $\mathfrak{L}$ a m^2 parametri si abbassa al sottogruppo lineare speciale $\mathfrak{L}_1$ a m^2-1 parametri invariante in $\mathfrak{L}$.(*)

§ 174

Riduzione del gruppo G ad un gruppo puro G_r di Lie

Cogli studii degli ultimi paragrafi noi non abbiamo fatto altro che porre i principii fondamentali delle teorie di Picard e Vessiot.

(*) È notissima del resto la trasformazione
$$x = e^{\int p_1 dt} \cdot y$$
colla quale si cangia la proposta in una nuova equazione differenziale per y in cui manca il termine in $y^{(m-1)}$; allora il Wronskiano è una costante ed il gruppo della nuova equazione è $\mathfrak{L}_1$.

L'ulteriore sviluppo della teoria richiederebbe: 1° la formazione generale delle risolventi, cioè delle equazioni differenziali algebriche cui soddisfano le funzioni razionali di $x_1\ x_2 \dots x_m$ e loro derivate, 2° l'esame dell'abbassamento che si produce nel gruppo di razionalità per la risoluzione di una tale risolvente (riduzione ad un sottogruppo invariante), o più in generale di un'equazione differenziale ausiliaria.

Ma tutto ciò richiederebbe uno studio più accurato dei sottogruppi algebrici del gruppo lineare L e dei loro invarianti differenziali, studio nel quale non possiamo qui addentrarci. Ci limiteremo per ciò ad esporre le belle ricerche di Vessiot sulle equazioni differenziali lineari integrabili per quadrature, che corrispondono alle ricerche di Galois sulle equazioni algebriche risolubili per radicali, e per le quali bastano già le cognizioni fin qui acquistate.

Prima però vogliamo accennare alla questione seguente. Il gruppo di razionalità G di un'equazione differenziale lineare può essere, come più volte si è avvertito, un gruppo puro Γ_r di Lie (generato da r trasformazioni infinitesime) oppure un grup-

po misto. In ogni caso esso è un gruppo algebrico e per ciò se G è misto esso conterrà, pei risultati del § 32, un gruppo puro Γ_r' di Lie ad r parametri e conterrà di un numero finito q di serie di trasformazioni della forma

$$\Gamma_r', \quad \zeta_2\Gamma_r', \zeta_3\Gamma_r', \dots \dots \zeta_q\Gamma_r',$$

le q sostituzioni moltiplicatrici

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2, \zeta_3 \dots \dots \zeta_q$$

essendo permutabili con Γ_r'.

Vogliamo ora dimostrare che, aggiungendo al campo di razionalità una funzione algebrica in questo campo, si può ridurre il gruppo di razionalità al sottogruppo puro Γ_r'. Ammettiamo per ciò che si possa trovare una funzione razionale

$$y = R(x_1 x_2 \dots x_m; x_1' x_2' \dots x_m' \dots)$$

il cui sottogruppo numerico sia precisamente Γ_r' - Applicando alla y le sostituzioni di G, essa acquista soltanto i q valori distinti

$$y_1 = y, \ y_2 = y_{\zeta_2}, \ y_3 = y_{\zeta_3} \dots \dots y_q = y_{\zeta_q}$$

Le funzioni simmetriche di questi valori rimangono numericamente invariate per tutte le sostituzioni di G, e sono per ciò razionalmente note nel campo primitivo. Si può dunque costruire

un'equazione di grado q

(29) $\Theta(y) = 0$

con coefficienti funzioni di t razionalmente note, di cui $y_1, y_2 \dots y_q$ sono le radici. Dunque la y_1 è una funzione algebrica nel detto campo; la sua aggiunta abbassa il gruppo da G a Γ_r (§ prec.^te^).

E siccome nella teoria delle equazioni differenziali riguardiamo come operazione effettuabile la risoluzione di equazioni algebriche, vediamo che ci si può sempre limitare a considerare il caso in cui il gruppo di razionalità è ridotto ad un gruppo puro di Lie.

Si può ancora osservare che, per quanto si è visto al § 32, eseguendo entro $y_1, y_2 \dots y_q$ le sostituzioni di G, queste radici si permutano fra loro secondo le sostituzioni di un gruppo finito ordinario d'ordine q. Questo è manifestamente il gruppo di Galois per l'equazione (29) nel campo di razionalità che si considera.

§. 175

Condizioni necessarie per l'integrabilità per quadrature

Andiamo ora ad occuparci delle equazioni differenziali lineari integrabili per successive quadrature. Intendiamo con ciò che si debba pervenire a trovare tutte le soluzioni della proposta ampliando via via il campo di razionalità coll'aggiunta di funzioni del tipo $\int \varphi(t)\,dt$ o dell'altro

$$e^{\int \varphi(t)dt}$$

dove $\varphi(t)$ è razionalmente nota nel campo primitivo, ovvero in uno dei campi ottenuti per ampliamenti precedenti - Aggiungere una funzione di questo tipo non è altro che aggiungere una e quindi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t)\,, \quad o \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(t).y$$

La questione fondamentale è qui di esaminare quale abbassamento può produrre nel gruppo G di un'equazione differenziale lineare una tale aggiunta - Più in generale supponiamo di ampliare il campo di razionalità coll'aggiunta -

della soluzione generale di un'equazione differenziale di 1° ordine

(30) $\frac{dy}{dt} = \varphi(y, t)$

e domandiamoci quale potrà essere eventualmente l'abbassamento prodotto nel gruppo di razionalità (*). Dimostriamo il teorema: Se per l'aggiunta della soluzione generale dell'equazione del 1° ordine (30) il gruppo di razionalità G con r parametri della proposta si abbassa ad un sottogruppo Γ di un numero minore di parametri, Γ avrà precisamente r-1 parametri e sarà sottogruppo invariante in G.

Nel campo attuale di razionalità il gruppo G dell'equazione avendo r parametri, l'equazione differenziale algebrica irriducibile (22) § 170 cui soddisfano le soluzioni della risolvente di Picard dedotte da una fissa con sostituzioni di G, sarà un'equazione

(31) $f(V, V', V'' \ldots\ldots V^{(r)}) = 0$

d'ordine r. Per l'aggiunta della soluzione gene-

(*) Una questione analoga e più generale si può risolvere aggiungendo le soluzioni di un'equazione differenziale algebrica irriducibile. Il gruppo G si abbassa in ogni caso ad un sottogruppo invariante (Picard. T. III pag. 562)

ale y della (32) riducendosi il gruppo G ad un sottogruppo Γ con $r_1 < r$ parametri, alla (31) verrà a sostituirsi l'altra d'ordine r_1

$$(32)\quad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r_1)}; y) = 0$$

nei cui coefficienti comparirà razionalmente la y. Ora se deriviamo una volta la (32) otteniamo

$$(32^*)\quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial V} V' + \frac{\partial f_1}{\partial V'} V'' + \dots\dots + \frac{\partial f_1}{\partial V^{(r_1)}} V^{(r_1+1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \psi(y, t) = 0$$

e fra questa e la precedente eliminando y formeremo un'equazione differenziale algebrica d'ordine r_1+1 con coefficienti razionalmente noti nel campo primitivo

$$(33)\qquad \Phi_1(V, V', V'' \dots\dots V^{(r_1+1)}) = 0$$

Avendo questa soluzioni comuni colla (31) irriducibile e d'ordine r, sarà necessariamente $r_1+1 \geq r$, e poichè $r_1 < r$ ne segue appunto

$$r_1 = r - 1,$$

cioè intanto Γ ha $r-1$ parametri. Resta a provarsi che Γ è invariante in G. Per ciò cominciamo dall'osservare che l'equazione (33) d'ordine $r = r_1+1$ ammette tutte le soluzioni di (31) le quali si ottengono dunque dalla soluzione generale della (32) facendo variare la costante arbitraria che entra in y.

Ora siano y_1, y_2 due soluzioni particolari

della (30) (due particolari determinazioni di y) e

$$(\alpha) \qquad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r-1)}; y_1) = 0$$

$$(\beta) \qquad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r-1)}; y_2) = 0$$

Indicando con V_1 una particolare soluzione di (α), con V_T una particolare di (β), sarà per quanto si è visto alla fine del § 172 V_γ la soluzione generale di (α) e $V_{\gamma T}$ la soluzione generale di (β), percorrendo γ le sostituzioni di T - Ora per le proprietà fondamentali delle soluzioni della risolvente di Picard (V: § 170 formola (23)) abbiamo

$$(34) \qquad V_\gamma = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 \frac{dV_1}{dt} + \dots\dots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}},$$

i coefficienti α dipendendo unicamente dalla sostituzione γ. Si ha quindi per la (23*) § 170

$$(34^*) \qquad V_{T\gamma} = \alpha_1 V_T + \alpha_2 \frac{dV_T}{dt} + \dots\dots$$

Sostituendo la V_γ in (α) questa deve essere soddisfatta, sicché ponendo

$$\theta = \alpha_1 V + \alpha_2 V' + \dots\dots$$

l'equazione

$$(35) \qquad f_1(\theta, \theta', \theta'' \dots \theta^{(r-1)}; y_1) = 0$$

avrà la soluzione V_1 della (α) e quindi tutte le altre. Abbassando nella (35), per mezzo della (α) stessa e della

$$y_1' = \varphi(y_1, t),$$

l'ordine delle derivazioni di V ad $r-1$ questa (35)

deve ridursi ad un'identità (in virtù del primo teorema al § 169) - Se ne conclude che anche la

$$f_1(\theta, \theta', \theta'' \ldots\ldots; y_2) = 0$$

ammette tutte le soluzioni della (β) poichè la y_2 verifica la medesima relazione

$$y_2' = \varphi(y_2, t);$$

dunque: qualunque sia γ sarà $V_{T\gamma}$ una soluzione della (β). D'altra parte ogni soluzione della (β) è, come si è ricordato sopra, una $V_{\gamma_1 T}$, appartenendo γ_1 a T, e perciò

$$T\gamma = \gamma_1 T$$

ossia

$$T\gamma T^{-1} = \gamma_1$$

Questo dimostra appunto che T è invariante in G -

Dimostrato così il teorema enunciato, osserviamo che se l'equazione differenziale lineare proposta è integrabile per quadrature, l'ampliamento successivo del campo prodotto dall'aggiunta di queste quadrature, deve da ultimo ridurre all'identità il gruppo di razionalità. Ma ogni volta che il gruppo si riduce ad un sottogruppo di un minor numero di parametri, questo ha precisamente un parametro di meno ed è invariante

nel primitivo. Dunque, supponendo l'integrabilità per quadrature, il gruppo dell'equazione deve possedere una serie di composizione i cui indici siano tutti eguali ad 1, cioè il gruppo stesso deve essere integrabile (V.: § 61). Stabiliremo poi fra breve che la condizione d'integrabilità del gruppo trovata così come necessaria perchè l'equazione sia integrabile per quadrature è anche sufficiente. Risulterà così dimostrato in tutte le sue parti il bel teorema di Vessiot:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione differenziale lineare sia integrabile per quadrature è che essa abbia un gruppo di razionalità integrabile.

§ 176

Equazione differenziale lineare generale
Semplicità del gruppo L_n

Applichiamo subito i risultati precedenti alla dimostrazione del teorema:

A) L'equazione differenziale lineare generale (d'ordine $m > 1$) non è integrabile per quadrature.

Il gruppo di razionalità di una tale equa-

zione è infatti il gruppo lineare omogeneo totale $\mathcal{L}$ (§ 172); e si è già osservato alla fine del § 173 che ampliando il campo di razionalità colla aggiunta della funzione

$$e^{\int p_1 dt}$$

il gruppo si abbassa al gruppo lineare speciale $\mathcal{L}_1$ *. Si osserverà ora che questo modo di abbassamento corrisponde al teorema generale del § 174 giacchè, avendo $\mathcal{L}$ m^2 parametri, $\mathcal{L}_1$ ne ha m^2-1 ed è invariante in $\mathcal{L}$. Tale riduzione corrisponde perfettamente, nella teoria algebrica di Galois, a quella che mediante l'aggiunta della radice quadrata del discriminante abbassa il gruppo totale al gruppo alterno di sostituzioni sulle radici.

Per dimostrare il teorema A) basterà ora dimostrare che il gruppo $\mathcal{L}_1$ non è integrabile. Anzi sussiste, come Lie ha dimostrato, la proprietà molto più generale:

B) Il gruppo lineare speciale $\mathcal{L}_1$ è un gruppo semplice.

Riguardando le variabili $x_1\, x_2 \ldots x_m$ come coordinate omogenee nello spazio lineare S_{m-1} ad $m-1$ dimensioni, vediamo che $\mathcal{L}_1$ non è altro che il gruppo generale proiettivo in questo spazio -

Ponendo cioè

$$y_i = \frac{x_i}{x_m} \qquad (i=1,2,\dots m-1).$$

L_1 diventa il gruppo generale di sostituzioni lineari frazionarie della forma

$$(i=1,2,\dots m-1)\quad y_i' = \frac{a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \dots + a_{i\,m-1}y_{m-1} + a_{im}}{a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{m,m-1}y_{m-1} + a_{mm}}$$

Ora, per la forma stessa frazionaria delle sostituzioni, è inutile imporre pel determinante $A\,(a_{ik})$ il valore 1, potendosi sempre ottenere questo valore di A col moltiplicare tutti i coefficienti a per un fattore.

Così il gruppo L_1 è posto in relazione d'isomorfismo oloedrico col gruppo generale projettivo dello spazio S_{m-1}, ed il teorema (B) equivale all'altro:

C) Il gruppo generale projettivo nello spazio S_{m-1} a $m-1$ dimensioni è un gruppo semplice

Usando nella formola precedente le lettere x in luogo delle y, cioè chiamando ora

$$x_1, x_2 \dots \dots x_{m-1}$$

le usuali coordinate metriche nell'S_{m-1}, scriviamo le equazioni finite del gruppo projettivo G_{m^2-1}

$$(36)\qquad x_i' = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{i\,m-1}x_{m-1} + a_{im}}{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1} + a_{mm}}$$

Procedendo come al § 133 pel caso dell'S_2 deter-

miniamo le m^2-1 trasformazioni infinitesime generatrici osservando che l'identità corrisponde ai valori

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} \quad (*)$$

e quindi la più generale trasformazione infinitesima si otterrà ponendo

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + b_{ik}\delta t,$$

le b_{ik} essendo costanti arbitrarie. Con queste posizioni si trova subito dalle (36):

$$\delta x_i = x_i' - x_i = \{[b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{i,m-1}x_{m-1} + b_{im}] -$$

$$- x_i[b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{m,m-1}x_{m-1} + b_{mm}]\}\delta t$$

cioè per la corrispondente trasformazione infinitesima:

$$Xf = \sum_i \{(b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{im}) - x_i(b_{m1}x_1 + \dots + b_{mm})\}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Se delle costanti b prendiamo dapprima nulle tutte le b tranne $b_{km} = 1$, abbiamo per la corrispondente trasformazione infinitesima

$$\alpha) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \dots m-1$$

poi facendo nulle tutte le b tranne

$$b_{ik} = 1 \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1.2 \dots m-1$$

(*) Si ricordi il significato del simbolo ε_{ik}, cioè

$$\varepsilon_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k \end{cases}$$

abbiamo le altre

β) $x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$; $i, k = 1, 2 \ldots\ldots m-1$

In fine facendo nulle tutte le b, tranne

$$b_{mk} = 1,$$

avremo le $m-1$ seguenti;

γ) $x_k \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$; $k = 1, 2 \ldots m-1$

Le α) β) γ) danno già le

$$(m-1) + (m-1)^2 + (m-1) = m^2 - 1$$

trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo projettivo - Per esse, indicando per brevità $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ con p_i, introduciamo i simboli

(37) p_i , $T_{ik} = x_i p_k$, $P_i = x_i \sum_k x_k p_k$.

$i, k = 1, 2, \ldots m-1$

Di queste le prime $m-1$ p_i hanno il significato geometrico di traslazioni; esse sono evidentemente tutte affini fra loro entro il gruppo projettivo (anzi già entro il sottogruppo dei movimenti) -

Notiamo le formole di composizione

(38) $(p_i p_k) = 0$; $(p_j, T_{ik}) = \varepsilon_{ij} p_k$,

$$(p_j, P_i) = T_{ij} + \varepsilon_{ij} \sum_k T_{kk},$$

dalle quali facilmente risulta la verità del teorema C), che cioè il gruppo projettivo G_{m^2-1} non possiede alcun sottogruppo invariante - Già al

contrario T un tale sottogruppo ed

(39) $$U = \sum_i^{1\dots m-1} \alpha_i p_i + \sum_{ik}^{1\dots m-1} \beta_{ik} T_{ik} + \sum_i^{1\dots m-1} \gamma_i P_i$$

una sua trasformazione infinitesima, le α, β, γ essendo costanti. Dimostriamo che T possiede tutte le trasformazioni infinitesime (37) e coincide quindi con G_{m^2-1}. Insieme alla U si troverà in T qualunque trasformazione alternata (SU) essendo S una qualunque delle (37). In particolare avremo in T la $U' = (p_j U)$, cioè per le (38)

(40) $$U' = \sum_k \beta_{jk} p_k + \sum_i \gamma_i T_{ij} + \gamma_j \sum_k T_{kk},$$

quindi anche

$$U'' = (p_j U').$$

che ci dà

(41) $$U'' = \gamma_j p_i + \gamma_i p_j$$

Ne segue che in T vi è certo una combinazione delle p, cioè una traslazione infinitesima, e quindi tutte le p_i; poichè la (41) dà certo di tali traslazioni se non sono nulle tutte le γ. Se poi tutte le γ sono nulle, la (40) dà una traslazione infinitesima quando non siano nulle tutte le β_{jk}; ma in tal caso la (39) sarebbe già una traslazione infinitesima. Dunque T contiene tutte le p, e quindi anche, per le ultime 38, tutte le

cioè tutte le

$$T_{ij} + \varepsilon_{ij} \sum_k T_{kk}$$

e le

$$T_{ij} \quad \text{per } i \neq j$$

$$T_{ii} + \sum_k T_{kk},$$

onde anche, sommando queste ultime rispetto ad i:

$$m \sum_i T_{ii} \quad \text{o} \quad \sum_k T_{kk},$$

e sottraendo dalla precedente anche la T_{ii}; dunque tutte le T_{ij} sono in Γ. Infine avremmo in Γ la trasformazione

$$(T_{ii}, P_i) = (x_i p_i,\ x_i \sum_k x_k p_k) = x_i \sum_k x_k p_k = P_i,$$

e quindi tutte le (37) si trovano in Γ c. d. d.

Il teorema C) è così dimostrato. Il gruppo generale projettivo dà una delle quattro classi di gruppi semplici trovate da Lie a cui abbiamo accennato alla fine del § 82. Come semplice notizia aggiungiamo che le altre tre classi sono date ancora dai gruppi projettivi che trasformano in sé una quadrica non degenere, od un complesso lineare non degenere in uno spazio di un numero impari di dimensioni (V. Lie Vol. III pag. 682).

§ 177
La seconda parte del teorema di Vessiot

Veniamo ora alla seconda parte del teorema di Vessiot, già enunciato al § 176, che cioè: Ogni equazione differenziale lineare con un gruppo di razionalità integrabile è integrabile per quadrature.

Per dimostrarlo ci fonderemo sopra un risultato conseguito da Lie, che riguarda la costituzione dei sottogruppi integrabili nel gruppo lineare omogeneo (*). Se si considerano tutte le sostituzioni della forma

$$(K)\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = a_{11} x_1 \\ \bar{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\ \bar{x}_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{x}_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mm} x_m \end{cases}$$

si ha evidentemente un gruppo K con $\frac{m(m+1)}{2}$ pa-

(*) Lie-Engel - Transformationsgruppen I pag. 589. Lie-Scheffers - Vorlesungen über continuierliche Gruppen (pag. 533)

rametri, sottogruppo di $\mathfrak{L}_{m^2}$ - Le sue trasformazioni infinitesime generatrici sono

$$x_1p_1\,;\; x_1p_2,\, x_2p_2\,;\; x_1p_3,\, x_2p_3,\, x_3p_3\,;\;\ldots\ldots;\; x_1p_m,\, x_2p_m \ldots x_mp_m$$

Il gruppo K è integrabile e tali sono quindi tutti i suoi sottogruppi. Il risultato stabilito da Lie consiste in questo che ogni sottogruppo integrabile di $\mathfrak{L}_{m^2}$ è affine ad un sottogruppo di K.

Sarà dunque provata la seconda parte del teorema di Vessiot se si dimostra che un'equazione differenziale lineare, avente per gruppo di razionalità il gruppo K (od un suo sottogruppo), è integrabile per quadrature - Supponendo di avere una tale equazione, consideriamo l'integrale particolare x_1 ed i successivi Wronskiani

$$W_2 = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \,,\quad W_3 = \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad W_m = \begin{vmatrix} x_1^{(m-1)} & \ldots & x_m^{(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & \ldots & x_m \end{vmatrix}$$

si vede subito che ciascuna di queste funzioni razionali di $x_1\; x_2 \ldots x_m$ e derivate si moltiplica per un fattore costante per qualsiasi sostituzione di K, onde segue che le loro derivate logaritmiche

$$(42)\qquad \frac{W_1'}{W_1} = \frac{x_1'}{x_1}\,,\quad \frac{W_2'}{W_2}\,,\quad \frac{W_3'}{W_3}\,,\;\ldots\ldots\; \frac{W_m'}{W_m}$$

sono razionalmente note. Siamo dunque ridotti a

provare che quando per un'equazione differenziale lineare sono razionalmente note le derivate logaritmiche (42) dei Wronskiani

$$W_1 , W_2 \dots W_m$$

l'equazione è integrabile per quadrature. Essendo razionalmente nota, diciamo $= \varphi(t)$, la derivata logaritmica di x_1, con una quadratura si conosce l'integrale particolare

$$x_1 = e^{\int \varphi(t)dt}$$

Con una trasformazione ben nota, si abbassa allora l'equazione differenziale proposta d'ordine m

$$(43) \quad x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$$

all'ordine $m-1$, cangiando la funzione incognita x_1 in y colla trasformazione

$$(44) \qquad x = x_1 \int y\,dt$$

Ciò dà per y l'equazione lineare d'ordine $m-1$

$$(45) \quad y^{(m-1)} = q_1 y^{(m-2)} + q_2 y^{(m-3)} + \dots + q_{m-1} y ,$$

i coefficienti q esprimendosi pei primitivi colle formole:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{x_1}(-m x_1' + p_1 x_1) \\ q_2 = \frac{1}{x_1}\left\{-\binom{m}{2} x_1'' + p_1 m x_1' + p_2 x_1\right\} \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_k = \frac{1}{x_1}\left\{-\binom{m}{k} x_1^{(k)} + \binom{m}{k-1} p_1 x_1^{(k-1)} + \dots + p_k x_1\right\} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

onde si vede appunto che la (45) ha i coefficienti q razionalmente noti nel campo ampliato coll'aggiunta di $x_1 = e^{\int y(t)dt}$. Indichino ora

$$y_1, y_2 \dots y_{m-1}$$

gli integrali particolari della (45) corrispondenti, secondo la (44), a $x_2, x_3 \dots x_m$, cioè

(46) $x_2 = x_1 \int y_1\, dt$, $x_3 = x_1 \int y_2\, dt$, ... $x_m = x_1 \int y_{m-1}\, dt$

Se si costruisce il Wronskiano

$$W_r = W(x_1, x_2 \dots x_r) = \begin{vmatrix} x_1^{(r-1)} & x_2^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{vmatrix},$$

sostituendovi i valori (46), con semplici trasformazioni su questo determinante si trova subito la formola

(47) $W_r = x_1^{\,r} W(y_1, y_2 \dots y_{r-1}) = x_1^{\,r} \overline{W}_{r-1}$

Questa, facendo $r = m$, ci prova che gli integrali

$$y_1\ y_2 \dots y_{m-1}$$

della (45) formano un sistema fondamentale.

Inoltre, derivandola logaritmicamente, si trae

$$\frac{\overline{W}'_{r-1}}{\overline{W}_{r-1}} = \frac{W'_r}{W_r} - r\frac{x'_1}{x_1},$$

onde segue che (nel nuovo campo di razionalità) le derivate logaritmiche dei nuovi Wronskiani $\overline{W}_i$ sono razionalmente note. Si può dunque

procedere nuovamente sulla trasformata (4.5) come prima sulla proposta (4.3), onde risulta stabilito il teorema di Vessiot.

NOTA I (*)

Le trasformazioni finite di un gruppo $G_r \equiv (X_1f, X_2f \ldots X_rf)$ composte con r trasformazioni prese rispettivamente dagli r sottogruppi ad un parametro $[X_1f], [X_2f], \ldots [X_rf]$

Come complemento agli studi sulla generazione di un gruppo G_r (Cap. I, II) aggiungiamo le osservazioni seguenti.

Le r trasformazioni infinitesime

$$X_1f = \sum_i \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad X_2f = \sum_i \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \ldots\ldots X_rf = \sum_i \xi_{ri} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

generatrici di un gruppo G_r generano ciascuna un gruppo G_1 ad un parametro. Scegliamo ad arbitrio dal primo gruppo X_1f una trasfor-

---

(*) Scheffers-Lie pag. 192
Lie-Engel III pag. 802 (nota)

mazione finita S_{t_1}, indicando t_1 il corrispondente valore del parametro; così dal secondo gruppo $X_2 f$ una trasformazione S_{t_2}, ... dall' r^{mo} gruppo $X_r f$ una trasformazione S_{t_r}.

È chiaro che la trasformazione S composta da queste r successive

$$(1) \qquad S = S_{t_1} S_{t_2} \dots\dots S_{t_r}$$

appartiene a G_r. Ora domandiamo inversamente se una qualunque trasformazione S di G_r potrà decomporsi in un prodotto (1) di trasformazioni prese rispettivamente dagli r sottogruppi ad un parametro

$$X_1 f \dots\dots X_r f .$$

La risposta, come si vedrà, è affermativa almeno finchè la trasformazione S di G_r è presa in un intorno sufficientemente ristretto dell' identità.

Per dimostrarlo basterà provare che nella trasformazione composta (1) tutti gli r parametri $t_1, t_2, \dots t_r$ sono essenziali, poichè allora la serie (1) sarà una serie ∞^r e quindi, almeno in un certo intorno dell' identità, coinciderà con G_r (*). Ora se i-

(*) Se le equazioni finite di G_r sono

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; a_1 a_2 \dots a_r)$$

ciamo le successive equazioni finite di $S_{t_1}, S_{t_2} \dots S_{t_r}$ sviluppate in serie, tenendo conto dei soli termini del primo ordine; avremo (§9):

per la $S_{t_1} \dots\dots x_i' = x_i + t_1 \xi_{1i}(x) + \dots\dots$

" $S_{t_2} \dots\dots x_i'' = x_i' + t_2 \xi_{1i}(x') + \dots\dots$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

" $S_{t_r} \dots\dots x_i^{(r)} = x_i^{(r-1)} + t_r \xi_{1i}(x^{(r-1)}) + \dots\dots$

Componendo ed indicando con $\overline{x}_i$ le variabili trasformate nella S, avremo quindi

(2) .... per la S .... $\overline{x}_i = x_i + t_1 \xi_{1i}(x) + t_2 \xi_{2i}(x') + \dots + t_r \xi_{ri}(x^{(r-1)}) +$
$+ \dots\dots$,

i termini non scritti contenendo le potenze superiori dei parametri t.

Bisogna dunque provare che in questa serie (2) gli r parametri $t_1, t_2 \dots t_r$ sono essenziali —

Se ciò non fosse, applicando la S, anziché ad un

---

la $S_{t_1}, S_{t_2} \dots\dots S_{t_r} = S$ appartenendo a G_r sarà data da certi valori dei parametri a

(α) $\qquad a_k = \psi_k(t_1 t_2 \dots t_r)$

e poiché $t_1 t_2 \dots\dots t_r$ sono essenziali in S sarà

$$\frac{\partial(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_r)}{\partial(t_1 t_2 \dots t_r)} \neq 0;$$

Dunque, almeno in un campo abbastanza ristretto, si potranno invertire le (α) esprimendo $t_1 t_2 \dots t_r$ per $a_1 a_2 \dots a_r$

solo punto $(x_1 x_2 \dots x_n)$, ad un gruppo di r punti

$$(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)})$$
$$(x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \dots\dots x_n^{(2)})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(x_1^{(r)}\ x_2^{(r)} \dots\dots x_n^{(r)}).$$

anche nella relativa trasformazione data dalle formole:

$$(3)\dots\ \bar{x}_i^{(\lambda)} = x_i^{(\lambda)} + t_1\xi_{1i}(x^{(\lambda)}) + t_2\xi_{2i}(x^{(\lambda)}) + \dots\dots + t_r\xi_{ri}(x^{(\lambda)}) + \dots$$
$$\lambda = 1, 2 \dots r$$

gli r parametri $t_1\ t_2 \dots t_r$ non sarebbero tutti essenziali - Sappiamo invece dal § 23 (nota) che già la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x^{(1)})\ \xi_{12}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{1n}(x^{(1)})\ \xi_{11}(x^{(2)}) \dots\dots \xi_{1n}(x^{(2)}) \dots\dots \xi_{11}(x^{(r)}) \dots \xi_{1n}(x^{(r)}) \\ \xi_{21}(x^{(1)}),\ \xi_{22}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{2n}(x^{(1)})\ \xi_{21}(x^{(2)}) \dots \xi_{2n}(x^{(2)}) \dots \xi_{21}(x^{(r)}) \dots \xi_{2n}(x^{(r)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{r1}(x^{(1)})\ \xi_{r2}(x^{(1)}) \dots\dots \xi_{rn}(x^{(1)})\ \xi_{r1}(x^{(2)}) \dots \xi_{rn}(x^{(2)}) \dots \xi_{r1}(x^{(r)}) \dots \xi_{rn}(x^{(r)}) \end{matrix} \right\|$$

ha la caratteristica r; dunque gli r parametri t_i sono essenziali nella (3), e quindi nella (2). c.d.d.

Esempio. Applichiamo il risultato generale ora stabilito al gruppo G_6 di movimenti dello spazio.

I sei gruppi ad un parametro generatori di G_6 sono qui: 1° i tre gruppi continui di traslazioni secondo gli assi coordinati, 2° i tre gruppi conti-

ni di rotazioni attorno agli assi coordinati. Nel caso attuale il teorema generale conduce dunque a questo risultato ben noto che ogni movimento dello spazio si può decomporre in tre successive traslazioni secondo gli assi e in tre rotazioni attorno agli assi stessi.

NOTA II

Le equazioni differenziali ordinarie che posseggono sistemi di soluzioni fondamentali (Sistemi di Lie).

1
Enunciato del problema

Le teorie di Picard e Vessiot relative alle equazioni differenziali lineari ordinarie, i cui principii abbiamo svolto nell'ultimo Capitolo, furono estese dallo stesso Vessiot (*) ad una classe più generale di sistemi di equazioni differenziali ordinarie

---

(*) ... de la Faculté des Sciences de Toulouse T. VIII. 1894

che si avvicinano alle lineari per la proprietà di cui sono dotati: che il loro integrale generale si esprime, in determinato modo, per un conveniente numero di soluzioni particolari e per le costanti arbitrarie -

Vogliamo brevemente occuparci in questa nota dello studio di questi particolari sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che offrono un interessante applicazione della teoria dei gruppi continui finiti ad un problema analitico.

Partiamo dapprima dalla considerazione di un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee che, ridotte al primo ordine ed alla forma normale, scriviamo

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

dove $x_1, x_2 \dots x_n$ sono n funzioni incognite della variabile indipendente t e i coefficienti a_{ik} sono funzioni assegnate (analitiche) di t. Se prendiamo n diversi sistemi di integrali particolari

$$(2)\quad \begin{cases} (x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)}) \\ (x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \ldots\ldots x_n^{(2)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_1^{(n)}\ x_2^{(n)} \ldots\ldots x_n^{(n)}) \end{cases}$$

tali che il loro determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)} \ldots\ldots x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

sia, per un particolare valore di t per es. per $t=0$ diverso da zero, si vede subito che l'integrale generale delle (1) si comporrà nel modo seguente cogli n integrali particolari:

$$(3)\qquad x_i = c_1 x_i^{(1)} + c_2 x_i^{(2)} + \ldots c_n x_i^{(n)},\quad i=1,2\ldots n$$

dove le c_i sono le n costanti arbitrarie. È infatti, prendendo convenientemente le c, possiamo fare acquistare nelle (3) a $x_1\ x_2 \ldots x_n$ valori iniziali arbitrarii per $t=0$ –

È questo un primo e più semplice esempio di equazioni differenziali dotate della proprietà in discorso. Un altro esempio ci viene fornito dalle equazioni del tipo di Riccati

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt} = a x^2 + bx + c,$$

dove a, b, c sono funzioni date della variabile indipendente t. È ben noto che se x_1, x_2, x_3, x_4 sono quattro soluzioni particolari della (4), il loro rapporto anarmonico

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}$$

è costante. Se conosciamo quindi tre soluzioni particolari x_1, x_2, x_3 della (4), la soluzione generale x è determinata dalla formula

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = C\,\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3},$$

essendo C la costante arbitraria.

Considerati questi casi particolari, enunciamo il problema generale che si tratta di risolvere sotto la forma seguente:

Trovare tutti i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1\, x_2 \ldots x_n ; t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

dotati della proprietà che per un numero sufficientemente grande m di soluzioni particolari arbitrariamente scelte

$$(x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots\ldots x_n^{(k)}) \qquad k = 1, 2 \ldots m$$

possano esprimersi le soluzioni generali $x_1\, x_2 \ldots x_n$ con formule del tipo

$$\text{(B)} \qquad x_i = \Phi_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)} \ldots x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)} ; a_1 a_2 \ldots a_n),$$

essendo le Φ funzioni determinate delle m soluzioni particolari e delle n costanti arbitrarie (essenziali) a_1, a_2 ..... a_n -

Un sistema differenziale (A) che goda dell'enunciata proprietà si dirà un sistema con soluzioni fondamentali - Di questi sistemi differenziali si sono occupati Lie, Vessiot e Guldberg, la soluzione più generale del problema è stata data da Lie e questi sistemi (A) diconsi perciò anche sistemi di Lie

Procederemo alla determinazione dei sistemi di Lie dimostrando dapprima come da ogni gruppo finito continuo di trasformazioni deduconsi appunto dei sistemi di Lie e dimostreremo poi che i sistemi di Lie così ottenuti sono i più generali possibili -

2
Serie ∞^1 di trasformazioni contenute in un gruppo G_r

Consideriamo un gruppo G_r di Lie generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum \xi_{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \cdots r)$$

e siano

(5) $\qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \cdots x_n;\, a_1\, a_2 \cdots a_r)$

le equazioni finite del gruppo. Entro il gruppo G_r prendiamo una serie ∞^1 qualsiasi di trasformazioni; ciò che si otterrà ponendo nelle (5) gli r parametri a funzioni di un unico parametro t.

Così avremo la serie ∞^1

(6) $\qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \cdots x_n;\, a_1(t)\, a_2(t) \cdots a_r(t))$

che scriviamo anche

(6*) $\qquad x_i' = \varphi_i(x_1\, x_2 \cdots x_n; t)$

Derivando la (6) rapporto a t abbiamo

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_k^{1\cdots r} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\frac{da_k}{dt}$$

e, tenendo conto delle equazioni differenziali fondamentali del gruppo G_r (§7 (A) pag. 29), ne dedurremo

(7) $\qquad \dfrac{dx_i'}{dt} = \sum_s^{1\cdots r} \xi_{si}(x') \sum_k \psi_{sk}(a) \dfrac{da_k}{dt}$

La somma $\sum_k \psi_{sk}(a)\frac{da_k}{dt}$ è una certa funzione di t, che indichiamo con $\theta_s(t)$, poniamo cioè

(8) $\qquad \sum_k^{1\cdots r} \psi_{sk}(a)\dfrac{da_k}{dt} = \theta_s(t);$

da questa inversamente, colle notazioni del Cap. I, si trae

(8*) $\qquad \dfrac{da_j}{dt} = \sum_s^{1\cdots r} \alpha_{sj}(a)\,.\,\theta_s(t)$

Dopo ciò la (7) si scrive

(C) $\qquad \dfrac{dx_i'}{dt} = \sum_s^{1\cdots r} \theta_s(t)\,\xi_{si}(x')$

Così dunque: se la serie ∞^1 di trasformazioni (6*) è contenuta nel gruppo $G_r \equiv (X_1 f \ldots\ldots X_r f)$ le equazioni differenziali caratteristiche della serie (ottenute eliminando $x_1\, x_2 \ldots x_n$ fra le x'_i e le loro derivate) debbono porsi sotto la forma (C).

Inversamente dimostriamo: Se la serie ∞^1 di trasformazioni (6*) soddisfa a un sistema di equazioni differenziali del tipo (C) e di più contiene una trasformazione iniziale $S_a^{(0)}$ del gruppo G_r (p.e. l'identità) essa è interamente contenuta in G_r, almeno in un intorno di $S_a^{(0)}$.

Infatti gli integrali φ_i delle (C) sono perfettamente determinati dal ridursi per un valore iniziale di t, diciamo per $t=0$, alle

$$f_i(x_1, x_2 \ldots x_n;\ a_1^{(0)}\, a_2^{(0)} \ldots a_r^{(0)})$$

Integrando ora il sistema (8*), colle condizioni iniziali

$$a_j = a_j^{(0)} \quad \text{per } t=0,$$

e sostituendo nelle $f(x, a)$ per le a questi integrali delle (8*), le funzioni così ottenute

$$x'_i = f_i(x, a)$$

soddisferanno alle (C) come le x'_i e riducendosi così inizialmente, per $t=0$, ai medesimi valori $f_i(x, a^{(0)})$, coin-

ciderанno con essi c. d. d.

Dunque si può dire che i sistemi differenziali della forma (C) sono caratteristici per le serie ∞^1 di trasformazioni contenute nel gruppo G_r. Ci proponiamo ora di dimostrare che questi sistemi differenziali (C) ammettono sempre soluzioni fondamentali e sono i più generali possibili dotati di questa proprietà.

3

I sistemi differenziali (C) come sistemi di Lie

Cominciamo dal dimostrare il teorema diretto:

Ogni sistema di equazioni differenziali del tipo (C):

$$(C^*) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \theta_1(t)\xi_{1i}(x) + \theta_2(t)\xi_{2i}(x) + \dots\dots + \theta_r(t)\xi_{ri}(x)$$

$$i = 1, 2 \dots\dots n,$$

dove le θ sono funzioni arbitrarie della variabile t e le $\xi_{ki}(x)$ sono i coefficienti delle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad k = 1, 2 \dots r$$

generatrici di un gruppo G_r, è un sistema con soluzioni fondamentali (un sistema di Lie).

Questo teorema può dedursi dalla teoria degli invarianti di gruppi di punti sviluppata al Cap. IX. Risulta particolarmente dagli sviluppi ai §§ 110-111 che, ampliando il gruppo G_r un numero $\underline{m}$ abbastanza grande di volte in $G_r^{(m)}$, il gruppo $G_r^{(m)}$ agente sul sistema di m punti

$$(x_i^{(1)})\ (x_i^{(2)}) \ldots\ldots (x_i^{(m)}),$$

potremo far sì che le $\underline{r}$ equazioni caratteristiche per gli invarianti di $G_r^{(m)}$

$$(9) \quad X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \ldots\ldots + X_i^{(m)}F = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots r$$

siano tutte linearmente indipendenti e sia di più

$$nm > r$$

Allora il sistema (9) nelle $\underline{nm}$ variabili

$$(x_i^{(1)})\ (x_i^{(2)}) \ldots\ldots (x_i^{(m)})$$

ammette precisamente $s = nm - r$ soluzioni indipendenti, che indichiamo con

$$\psi_1\ \psi_2 \ldots\ldots \psi_s \text{ (*)}$$

e sono gli invarianti di $G_r^{(m)}$.

Se agli m punti precedenti ne aggiungiamo un $(m+1)^{mo}$ generico $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$, gli invarianti del gruppo di $m+1$ punti saranno le soluzioni del sistema di $\underline{r}$

(*) Può anche darsi che sia $s = 0$

equazioni indipendenti con $n(m+1)$ variabili:

$$(9^*) \quad X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \dots\dots + X_i^{(m)}F + X_i F = 0$$

$$i = 1, 2 \dots\dots r,$$

e saranno per ciò in numero di

$$n(m+1) - r = s + n$$

indipendenti. Ne avremo dunque, oltre $\psi_1\, \psi_2 \dots \psi_s$, <u>n</u> nuovi che diciamo

$$J_1(x_i^{(1)}\, x_i^{(2)} \dots x_i^{(m)}\, x_i),\ J_2(\quad) \dots\dots J_n(\quad).$$

È facile vedere che $J_1, J_2 \dots\dots J_n$ saranno indipendenti rispetto a $x_1, x_2 \dots\dots x_n$, cioè

$$(10) \qquad \frac{\partial(J_1 J_2 \dots J_n)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)} \neq 0$$

Cangiamo infatti le $nm = s + r$ variabili

$$x_i^{(1)}\, x_i^{(2)} \dots\dots x_i^{(m)}$$

in altre variabili indipendenti delle quali le prime <u>s</u> siano $\psi_1\, \psi_2 \dots \psi_s$ e le rimanenti r indichiamole con $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_r$. Il sistema (9) prenderà evidentemente la forma

$$\Omega_i F = \sum_k^{1 \dots r} \alpha_{ik}(\psi, \varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \qquad i = 1, 2 \dots r,$$

il determinante delle α essendo $\neq 0$. Il sistema (9^*) diventerà quindi

$$(11) \qquad \Omega_i F + X_i F = 0$$

Ora se sussistesse la (10) avremmo fra $J_1, J_2 \dots J_n, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_s, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_r$ almeno una relazione, sia-

$$(12) \qquad \Phi(J_1 J_2 \dots J_n \psi_1 \dots \psi_s \varphi_1 \dots \varphi_r) = 0$$

A questa funzione Φ identicamente nulla applicando l'operazione (11), e badando che $J_1 \dots J_n \psi_1 \dots \psi_s$ sono soluzioni di (11), ne seguirebbe

$$\alpha_{i1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \alpha_{i2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} + \dots + \alpha_{ir} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_r} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots r$$

onde, poiché $|\alpha_{ik}| \neq$, dedurremmo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_r} = 0,$$

e però la (12) stabilirebbe una relazione fra $J_1 J_2 \dots J_n$ $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s$, ciò che è assurdo. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se in una qualunque J delle n funzioni J_1 $J_2 \dots J_n$ al posto di $x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(m)}, x_i$ si pongono $m+1$ soluzioni del sistema differenziale (C), questa J diventerà una costante.

E infatti si avrà:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_i^{(1)}} \frac{dx_i^{(1)}}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(2)}} \frac{dx_i^{(2)}}{dt} + \dots + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(m)}} \frac{dx_i^{(m)}}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right\} =$$

$$= \sum_1^{n} \sum_s^{1 \dots r} \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_i^{(1)}} \theta_s(t) \xi_{si}(x^{(1)}) + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(2)}} \theta_s(t) \xi_{si}(x^{(2)}) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(m)}} \theta_s(t) \xi_{si}(x^{(m)}) + \frac{\partial J}{\partial x_i} \theta_s(t) \xi_{si}(x) \right\} =$$

$$= \sum_s \theta_s(t) \left\{ X_s^{(1)} J + X_s^{(2)} J + \dots + X_s^{(m)} J + X_s J \right\} = 0$$

Dunque m+1 soluzioni qualunque

$$(x_i^{(1)}) \quad (x_i^{(2)}) \ldots (x_i^{(m)}) \quad (x_i)$$

del sistema differenziale (C) sono legate dalle n relazioni, indipendenti rispetto alle $x_1 \ldots x_n$:

$$\begin{cases} J_1(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)} x) = a_1 \\ J_2(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)} x) = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_n(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)} x) = a_n, \end{cases}$$

le $a_1\, a_2 \ldots a_n$ essendo costanti. – Queste, risolute rispetto alle $x_1\, x_2 \ldots x_n$, danno appunto la soluzione generale del sistema (C) espressa per le m soluzioni particolari

$$x_i^{(1)} \quad x_i^{(2)} \ldots x_i^{(m)}$$

e per n costanti arbitrarie. Ciò dimostra che il sistema (C) è un sistema di Lie.

4.

I sistemi (C) come i sistemi più generali di Lie

Suppongasi ora inversamente che il sistema (A) di equazioni differenziali sia un sistema di Lie e sussistano quindi formole del tipo (B), che permettono di esprimere la soluzione generale $x_1\, x_2 \ldots x_n$ per m

soluzioni particolari

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \ldots\ldots x_i^{(m)}$$

e per le n costanti arbitrarie $a_1\, a_2 \ldots a_n$ -

In primo luogo poichè le (B) debbono lasciare arbitrarii i valori iniziali di $x_1\, x_2 \ldots x_n$ per $t=0$, dovranno essere risolubili rispetto ad $a_1\, a_2 \ldots a_n$ - Alle (B) potremo dunque sostituire il sistema equivalente

$$\begin{cases} J_1(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)};\, x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)}; \ldots x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)};\, x_1 \ldots x_n) = a_1 \\ J_2(- - - - - - - - - -) = a_2 \\ - - - - - - - - - - - - \\ J_n(- - - - - - - - -) = a_n \end{cases}$$

le $J_1, J_2 \ldots J_n$ essendo funzioni delle $n(m+1)$ variabili $x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \ldots x_i^{(m)}\, x_i$, indipendenti inoltre rispetto a $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Ciascuna funzione J diventando una costante quando le dette variabili soddisfano al sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1 \ldots x_n; t),\quad \frac{dx_i^{(1)}}{dt} = \varphi_i^{(1)},\ \frac{dx_i^{(2)}}{dt} = \varphi_i^{(2)} \ldots \frac{dx_i^{(m)}}{dt} = \varphi_i^{(m)},$$
$$i = 1, 2 \ldots n$$

(dove per brevità si è posto $\varphi_i^{(\lambda)} = \varphi_i(x_1^{(\lambda)} \ldots x_n^{(\lambda)} t)$) sarà un integrale di questo sistema e dovrà quindi soddisfare alla equazione associata alle derivate parziali del 1° ordine

(13) $$\sum \varphi_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} + \sum \varphi_i^{(2)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(2)}} + \dots + \sum \varphi_i^{(m)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(m)}} + \sum \varphi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

A questa equazione (13), con coefficienti funzioni delle $x^{(1)} \dots x^{(m)}, x$ e di t, dovranno soddisfare le n funzioni F che non contengono t esplicitamente. Dando dunque nella (13) a t valori particolari qualsiasi si avranno altrettante equazioni che saranno tutte soddisfatte da $F, F_2 \dots F_n$. Dalla (13) si deducono così quante si vogliano equazioni particolari, ma il numero q delle indipendenti non può superare $n(m+1)-n$ cioè $q \leq nm$. È chiaro quindi che prendendo un numero q sufficientemente grande di queste equazioni lineari particolari, l'equazione generale (13) con t variabile dovrà essere una conseguenza lineare di quelle q. Di più queste equazioni particolari avranno la forma stessa della (13), cioè i loro primi membri saranno aggregati di operazioni simili costruite sopra ciascun gruppo di variabili $(x, x_2 \dots x_n), (x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}) \dots (x_1^{(m)} \dots x_n^{(m)})$ — Le operazioni alternate formate con queste avranno pure manifestamente la medesima forma. Aggiungendo quindi al sistema quelle operazioni alternate che non sono combinazioni lineari delle precedenti, e così continuando, dovremo dunque trovare un sistema

completo di tali equazioni, il cui numero r sarà ancora $\leq n m$.

Ponendo

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots n} \xi_{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

dove le ξ_{ik} sono certe funzioni delle $x_1\, x_2 \ldots x_n$ il detto sistema completo avrà dunque la forma

$$(14) \quad Y_i F = X_i^{(1)} F + X_i^{(2)} F + \ldots + X_i^{(m)} F + X_i F = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots r$$

La condizione che il sistema sia completo si traduce in questo che le operazioni alternate $(Y_i Y_l)$ siano combinazioni lineari delle Y_i stesse, cioè si abbia

$$(Y_i Y_l) = \sum_s \vartheta_{ils} Y_s f,$$

dove le ϑ_{ils} appajono dapprima come funzioni delle $n(m+1)$ variabili $x_i^{(1)} \ldots x_i^{(m)}, x$. Ma, a causa della forma (14) delle Y, esse si decompongono nelle

$$\begin{cases} (X_i X_l) = \sum_s \vartheta_{ils} X_s f \\ (X_i^{(k)} X_l^{(k)}) = \sum_s \vartheta_{ils} X_s^{(k)} f \qquad k = 1, 2 \ldots m \end{cases}$$

onde, le $\xi_{i\lambda}^{(k)}$ contenendo il solo gruppo di variabili $x_1^{(k)} x_2^{(k)} \ldots x_n^{(k)}$ si deduce che le ϑ_{ils} debbono essere costanti assolute c_{ils}.

Dunque le r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_r f$$

generano un gruppo G_r ad r parametri ed i primi membri delle (14) non sono altro che le trasformazioni infinitesime del gruppo $G_r^{(m+1)}$ ampliato $m+1$ volte di G_r.

Dovendo poi il primo membro della (13) risultare da una combinazione lineare dei primi membri delle (14) si avranno identità della forma

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n; t) = \sum_s \theta_s \xi_{si}(x) \\ \varphi_i^{(\lambda)} = \varphi_i(x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} \ldots x_n^{(\lambda)}; t) = \sum_s \theta_s \xi_{si}(x^{(\lambda)});\quad \lambda = 1, 2 \ldots m \end{cases}$$

e i moltiplicatori θ_s non potranno contenere che la variabile t; dunque

$$\varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n; t) = \sum_s^{1 \ldots r} \theta_s(t) \xi_{si}(x)$$

ed il sistema (A) ha quindi necessariamente la forma (C).

Concludiamo dunque:

I più generali sistemi differenziali con soluzioni fondamentali (sistemi di Lie) sono quelli del tipo (C), che caratterizzano le serie ∞^1 di trasformazioni contenute in un gruppo continuo finito.

Osserviamo, per terminare, che i due semplici

esempi addotti al n.° 1 di questa nota del sistema di Lie rappresentato dalle equazioni lineari omogenee (1), e l'altro dato dall'equazione (4) di Riccati, corrispondono, il primo al gruppo lineare omogeneo totale L, il secondo al gruppo projettivo sopra una variabile.

FINE

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

~~DUE JAN 7 '38~~

MAR 17 1938

~~DUE FEB 14 '38~~

DUE FEB - 9 '40

DUE FEB 21 '41

Math 4509.03
Lezioni sulla teoria dei gruppi con
Cabot Science 003322698
3 2044 091 899 906